第 9 卷第 3 期 经 济 学（季 刊） Vol. 9, No. 3
2010 年 4 月 China Economic Quarterly April, 2010

类型相关情形下具有套利的非线性定价模型

孟大文 田国强*

摘 要 在代理人类型相关的非线性定价环境中，代理人之间可能结成联盟操纵信息并进行套利，垄断厂商需要设计出同时防范信息操纵和套利的定价合约。对类型相关且代理人数 $n \geqslant 3$ 的情形，Che and Kim（2006）证明了包含信息操纵与套利的合谋行为可以无成本防范。对 $n=2$ 这一在激励机制设计问题中占有重要地位的情况，本文证明无成本防范这一结论不再成立：信息操纵行为会引起配置效率的扭曲，套利活动会引起配置的进一步扭曲。并且，类型正相关和负相关时配置的扭曲方式不同。负相关时的配置扭曲将随着类型相关度的逐渐减弱而消失，而正相关时的配置扭曲不会随着类型相关度的减弱而消失。扭曲方式的差异导致有套利情形下的配置效率随着信息结构呈现不连续变化。从而，本文也推广了 Laffont and Martimort（2000）的类型相关但无套利和 Jeon and Manicucci（2005）的存在套利但类型无关情形下的结论。

关键词 非线性定价，弱防合谋机制，套利，类型相关

一、引 言

当厂商不完全了解代理人的偏好时，他们往往会向消费者提供差异化的合约菜单，通过消费者的自愿选择来甄别他们的类型。这种定价方式被称为非线性定价或二级价格歧视。显示原理（revelation principle）告诉我们，任何机制[1]所能实施的效率可通过一组直接显示机制实施，在这样的机制中，信息被上报给机制设计者，而指令被下传给分散决策的经济个体。根据这一原理，委托人需要代理人申报其偏好类型，然后据此向他们提供消费量并收取费用，通过一组激励相容的直接显示机制，委托人可以获得次优利润。

* 孟大文，华东师范大学金融与统计学院；田国强，上海财经大学经济学院。通信作者及地址：孟大文，华东师范大学金融与统计学院，200062；E-mail：devinmeng@yahoo.com.cn。我们衷心感谢复旦大学陈钊教授、中国人民大学聂辉华副教授、上海财经大学赵山博士、厦门大学张贻军博士以及两位匿名评审人的有益评论与修改意见，当然文责自负。田国强感谢德州农工大学私营企业研究中心和国家自然科学基金（NSFC-70773073）的经费支持。孟大文感谢教育部人文社科一般项目（09YJC790184）的经费支持。

[1] 本文中，“机制”和“合约”可以互换使用。

传统的委托代理理论假设代理人之间不存在合谋，但这个理想化的假设通常是不能成立的，除非委托人有能力完全控制代理人之间的沟通，或者代理人之间的沟通成本充分大。现实中代理人之间通常会以较低成本沟通，这就不可避免地诱发他们之间的合谋行为，而这种行为通常会损害委托人利益。代理人之间的合谋是机制设计理论中最受关注的问题之一，它是导致配置效率进一步[2]扭曲的主要因素。

代理人的类型相关度代表了他们之间的相似程度，它在很大程度上影响到机制所能执行的配置效率。当代理人之间类型相关且无合谋时，Crémer and McLean（以下简称CM）（1985，1988）证明了委托人可以通过贝叶斯纳什均衡实施与完全信息下相同的最优配置结果。这个重要的结论被称为“完全抽租定理”（full rent extraction theorem）。值得注意的是，在任意非零相关度下，这个定理都成立，但如果类型相关度为零，即代理人类型之间相互独立时，则委托人必须向代理人支付一定信息租金，从而只能实现次优的配置效率。这说明，随着信息结构由相关过渡到不相关情形，配置效率呈现不连续变化，在相关度为零处发生间断。

当代理人间存在合谋时，委托人不能再利用代理人之间的类型相关性无成本地诱导真实的信息显示，CM的完全抽租结论不再成立。Laffont and Mortimort（以下简称LM）（2000）在一个代理人类型正相关的委托代理模型中引入了合谋行为，创立了解决相关类型下防范合谋机制设计问题的基本方法。其中，一个无信息的第三方（uninformed third party）充当合谋组织者的角色。他的目标是最大化代理人组成的联盟的总福利。第三方向代理人提供一组支契约（a side contract）[3]，其中包含对上报给委托人的信息的操纵规则和代理人之间的转移支付规则。这个支契约必须满足的条件是代理人的激励相容约束（IC constraint）和参与约束（IR constraint），即要求代理人在支契约中向第三方如实申报个人类型，同时他们在支契约中所获得的收益不应少于他们以非合作方式执行主契约的收益。如果代理人彼此了解对方的类型，则他们间的合谋效率最高；如果代理人之间的信息是不对称的，则他们的合谋效率会因彼此的沟通障碍而降低。在一个公共物品提供模型中，他们得出以下结论：当代理人具有相互独立的类型时，所实现的配置效率仍然是次优的，合谋并不会带来配置效率的进一步扭曲；而当类型为弱正相关时，相对于无合谋的最优情形，防范合谋机制所实施的配置效率会产生向下扭曲；当相关度由正逐渐变为零时，防范合谋机制所实施的配置效率逼近于次优情形。

在非线性定价环境中，代理人之间会结成联盟，他们不仅会操纵信息而且会进行联盟内部的套利，即在联盟内部重新分配其购买的产品。此时，作

[2] “进一步”是相对于仅有非对称信息的情形而言。

[3] 与之对应的，委托人所提供的契约被称为主契约（grand contract）。

为机制设计者的委托人不仅应保证其所设计的非线性定价合约防范信息操纵，还应防范套利活动。通过引入代理人之间的套利行为，Jeon and Menicucci（以下简称 JM）（2005）拓展了 LM（1997，2000）的结论。他们证明了当代理人之间类型不相关时，所实现的配置效率仍然为次优，同信息操纵一样，套利行为并不会减少委托人的利润。此外，与 LM（2000）的两个代理人、两种类型模型不同，JM（2005）的结论可推广到多代理人和三种类型情形下。但他们的共同点是证明了仅在类型不相关情形下信息操纵或套利是可以无成本防范的。

Che and Kim（2006）（以下简称 CK（2006））对同时包含信息操纵和套利这一更一般的合谋行为进行了讨论，在代理人个数 $n\geqslant3$ 的情形下，他们得出了与 CM 相同的结论：类型独立时合谋可以无成本防范，仍然可以实现次优结果；类型相关时，合谋也可以无成本防范，仍然可以实现最优配置。这表明即使存在合谋，委托人仍可以实现完全抽租，从而推广了 CM（1985，1988）的结论。[4]

然而，他们的无成本防范结论依赖于 $n\geqslant3$ 这个假定。$n=2$ 这一情况在现实中非常重要，在激励机制设计问题中占有重要地位。[5] Hurwicz（1979）、Hurwicz and Weinberger（1984）、Reichelstein（1984）、Kwan and Nakamura（1987）、Maskin（1999）、Moore and Repullo（1990）、Dutta and Sen（1991）、Nakamura（1991）、Sjöström（1991）、de. Trenqualye（1992）、Busetto and Codognato（2009）等文献专门对 $n=2$ 情形下的纳什执行（Nash Implementation）问题进行了讨论。$n=2$ 时所得到的一些结论往往与 $n\geqslant3$ 不同。[6]类似的，本文将证明，对 $n=2$ 这一情况，无成本防范这一结论不再成立，类型相关情形下的信息操纵与套利会导致配置的扭曲。

本文的贡献主要包括以下几点：

第一，我们对 $n=2$ 的情形讨论了配置效率的扭曲问题，这是对 CK（2006）结论的扩展。如上文所述，CK（2006）只是证明了在 $n\geqslant3$ 时，信息操纵和套利都是可以无成本防范的，[7]但并没有给出 $n=2$ 情形下的合约形式和

---

[4] 关于 $n\geqslant3$ 且类型相关情形下的完全抽租，CK(2006)中还有一点额外的要求，即如果恰好 $n=3$ 则至少一个代理人的类型数多于 2。

[5] Moore and Repullo (1990)认为："We believe that this is important, since the two-agent model is the leading case for applications to contracting or bargaining."

[6] $n=2$ 时的执行难度往往会比 $n\geqslant3$ 时大，比如，Maskin(1999)、Moore and Repullo(1990)、Dutta and Sen(1991)、Sjöström (1991)等文献都证明了在 $n\geqslant3$ 时，无否决权(NVP)和单调性条件(Maskin Monotonicity)可保证纳什执行，但在两人情形下，这两个条件并不充分。再如 Hurwicz and Weinberger (1984)、Reichelstein (1984)、Kwan and Nakamura(1987)等文献都证明了只有两个代理人时不能通过光滑连续的机制执行瓦尔拉斯或林道对应。

[7] CK(2006)指出存在合谋时能否设计出与无合谋机制 $M=(t,q)$ 具有相同执行结果的防范合谋机制 $\hat{M}=(\hat{t},q)$ 取决于两个因素：一个是支付向量 $\hat{t}$ 的维数 D，这代表委托人所掌控的政策工具的多少或称委托人的"自由度"，因为委托根据不同自然状态对代理人做相机支付，所以 D 等于状态数目和代理人个数的乘积；另一个是 $\hat{t}$ 所受的约束条件的个数 C，这些条件要求无论代理人如何申报类型，$\hat{M}$ 带给代理人的期望支付与 M 相同，同时委托人在 $\hat{M}$ 中所获得的事后收益与在 M 中获得的期望收益相同。$n=2$ 时，$D<C$，所以委托人无法实施无合谋时的最优配置，随着代理人数 n 的增加，前者的增加速度远高于后者，只需 $n\geqslant3$ 时，即可保证 $D\gg C$，所以无合谋配置可以被执行。

配置扭曲方式，而本文则着重讨论了这一点。

第二，本文所得到的结果从以下两个方面拓展了 LM（2000）的结论。首先，LM（2000）研究的是公共物品提供问题，而本文研究的是私人物品提供问题。两者的主要区别在于前者中所有代理人均以非排他的方式消费相同数量的公共物品，他们无法对此公共品加以分割和分配；而在后者中每人获得一个私人消费量，他们有可能为了最大化联盟收益而对总消费量加以重新分配，即进行套利活动。这便赋予了代理人更大的自由度，因此委托人需要面临更多的约束，从而导致配置的进一步扭曲。其次，LM（2000）只考虑了代理人类型正相关时的情形，而本文则同时考虑了正相关和负相关两种情形。我们发现，在这两种情形下配置扭曲方式的不同导致配置效率在相关度为零处不连续。

第三，本文同时也拓展了 JM（2005）的主要结论。在 JM（2005）中，虽然同时考虑了信息操纵和套利行为，但由于他们假定代理人类型不相关，所以这两种合谋行为都是可以无成本防范的。而本文则同时分析了类型正相关、负相关和不相关三种情形。因此，JM（2005）的结论是本文的特例。

本文的余下部分安排如下：第二节介绍模型，第三节给出无合谋时的基准情形，第四节通过分析第三方所面临的问题给出防范合谋机制所必须满足的联盟激励相容约束和无套利约束，第五节给出了无套利情形下的最优防范合谋机制，第六节则给出了同时具有信息操纵和套利情形下的最优定价机制，最后在第七节中给出结论。

二、模　　型

（一）偏好、信息和机制

一个垄断性厂商生产的边际成本为 c，两个买方的消费量为 q_i，$i\in\{1,2\}$。假设代理人具有拟线性偏好，即当消费量为 q_i，向卖方的支付为 t_i 时，他们的效用为 $\theta_i V(q_i)-t_i$。$V(\cdot)$ 为递增的凹函数，即 $V'(\cdot)>0$，$V''(\cdot)<0$。代理人类型 $\theta_i\in\Theta_i=\{\underline{\theta},\bar{\theta}\}$ 为其私人信息，设 $\Delta\theta\equiv\bar{\theta}-\underline{\theta}$。$p(\theta_1,\theta_2)$表示状态 $(\theta_1,\theta_2)\in\Theta^2$ 出现的概率，此分布为共同知识，简单起见，我们记

$$p_{11}=p(\underline{\theta},\underline{\theta}),\quad p_{12}=p(\underline{\theta},\bar{\theta})=p(\bar{\theta},\underline{\theta}),\quad p_{22}=p(\bar{\theta},\bar{\theta}).$$

同时，以 $\rho\equiv p_{11}p_{22}-p_{12}^2$ 表示代理人之间的类型相关度。

垄断性卖方通过设计定价机制 M 来最大化其期望利润。根据显示原理，我们只需考虑下面的直接显示机制，该机制将代理人申报的类型 $(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 与消费量以及支付对应起来：

$$M=\{q_1(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2),q_2(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2),t_1(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2),t_2(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)\},\quad(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)\in\Theta^2.$$

由于买方是同质的，不失一般性，我们只考虑匿名机制（anonymous mechanism)，其中买方的消费量和支付只与其申报有关而与其身份无关。这样，我们可以引入以下简化符号：

$$q_{11}=q_1(\underline{\theta},\underline{\theta})=q_2(\underline{\theta},\underline{\theta}),\quad q_{12}=q_1(\underline{\theta},\bar{\theta})=q_2(\bar{\theta},\underline{\theta}),$$
$$q_{21}=q_1(\bar{\theta},\underline{\theta})=q_2(\underline{\theta},\bar{\theta}),\quad q_{22}=q_1(\bar{\theta},\bar{\theta})=q_2(\bar{\theta},\bar{\theta}).$$

t_{ij} 可用类似方法定义，令 $\boldsymbol{q}=(q_{11},q_{12},q_{21},q_{22})\in\mathbb{R}_+^4$，$\boldsymbol{t}=(t_{11},t_{12},t_{21},t_{22})\in\mathbb{R}^4$ 分别表示消费量和支付向量。

（二）联盟形成

应用 LM（1997，2000）所开创的方法，我们设一个无信息的第三方向两个代理人提供支契约 S。第三方的目标是在代理人的激励相容约束和参与约束下最大化他们的总剩余。行动的时序如下：

- 阶段 1：代理人了解其各自类型。
- 阶段 2：卖方提供主机制 M。如任何一个代理人拒绝该机制，他们只能得到保留效用，我们设其为零。这样博弈结束。
- 阶段 3：第三方向买方提供支机制（side mechanism）S。如任何一个买方拒绝该支机制，主机制被以非合作方式执行。如两个买方都接受 S，他们向第三方汇报类型，第三方将经过加工的信息再传递给卖方并承诺实施相应的联盟内部转移支付（side transfers）和重新分配规则。
- 阶段 4：信号被传递给主机制 M，消费量和支付被执行。S 所规定的联盟内再分配和转移支付（如果有的话）被实施。

具体的，S 具有如下形式：

$$S=\{\phi(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2),x_1(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\phi),x_2(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\phi),y_1(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2),y_2(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)\},\quad(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_1)\in\Theta^2,$$

其中，$\tilde{\theta}_2$ 为买方 i 所申报的类型。$\phi(\cdot)$ 表示经操纵后申报给卖方的信息。$y_i(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)$ 表示买方 i 从第三方处获得的转移支付。$x_i(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\phi)$ 表示当 ϕ 被汇报给卖方后，买方 i 从第三方处获得的产品转移数量，这代表联盟内部的产品重新分配规则。因为第三方既不生产产品也不拥有货币，所以支契约应满足如下事后预算平衡约束。

对货币转移支付：

$$\sum_{i=1}^{2}y_i(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)=0;$$

对产品再分配：

$$\sum_{i=1}^{2} x_i(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \phi) = 0.$$

以上两式对任何 $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_1) \in \Theta^2$ 和 $\phi \in \Theta^2$ 成立。令 $U^M(\theta_i)$ 表示类型为 θ_i 的代理人以非合作方式执行主机制 M 时所获得的期望支付。第三方所提供的支机制必须保证代理人所获得的支付不低于 $U^M(\theta_i)$。

三、代理人之间无合谋时的最优机制

（一）类型相关的情形

为了方便进一步的讨论，我们先给出根据 CM（1985，1988）的完全抽租定理分析类型相关且无合谋时的基准情形。此时，卖方的期望利润为

$$\pi(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}) \equiv 2p_{11}(t_{11} - cq_{11}) + 2p_{12}(t_{12} + t_{21} - cq_{12} - cq_{21}) + 2p_{22}(t_{22} - cq_{22}).$$

下面的贝叶斯激励相容约束（Bayesian incentive compatible constraint）应被满足。对 $\underline{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$ 类型的代理人分别有：

$$\begin{aligned} \mathrm{BIC}(\underline{\theta}): & p_{11}[\underline{\theta}V(q_{11}) - t_{11}] + p_{12}[\underline{\theta}V(q_{12}) - t_{12}] \\ & \geqslant p_{11}[\underline{\theta}V(q_{21}) - t_{21}] + p_{12}[\underline{\theta}V(q_{22}) - t_{22}]; \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{BIC}(\bar{\theta}): & p_{12}[\bar{\theta}V(q_{21}) - t_{21}] + p_{22}[\bar{\theta}V(q_{22}) - t_{22}] \\ & \geqslant p_{12}[\bar{\theta}V(q_{11}) - t_{11}] + p_{22}[\bar{\theta}V(q_{12}) - t_{12}]. \end{aligned} \tag{2}$$

同时还应满足如下的中期参与约束（interim participation constraints），对 $\underline{\theta}$ 和 $\bar{\theta}$ 类型分别有：

$$\mathrm{BIR}(\underline{\theta}): p_{11}[\underline{\theta}V(q_{11}) - t_{11}] + p_{12}[\underline{\theta}V(q_{12}) - t_{12}] \geqslant 0, \tag{3}$$

$$\mathrm{BIR}(\bar{\theta}): p_{12}[\bar{\theta}V(q_{21}) - t_{21}] + p_{22}[\bar{\theta}V(q_{22}) - t_{22}] \geqslant 0. \tag{4}$$ [8]

委托人所面临的问题是求出使四个约束同时为紧的支付向量 $\boldsymbol{t}$，在这样的支付下，代理人不能获得任何信息租金。[9] 如 $\rho \neq 0$，（1）至（4）同时取等号时的方程组有唯一解：

$$t_{11} = \frac{(p_{11}p_{22}\underline{\theta} - p_{12}^2\bar{\theta})V(q_{11}) - p_{12}p_{22}\Delta\theta V(q_{12})}{\rho}, \tag{5}$$

$$t_{12} = \frac{(p_{11}p_{22}\bar{\theta} - p_{12}^2\underline{\theta})V(q_{12}) + p_{11}p_{12}\Delta\theta V(q_{11})}{\rho}, \tag{6}$$

$$t_{21} = \frac{(p_{11}p_{22}\underline{\theta} - p_{12}^2\bar{\theta})V(q_{21}) - p_{12}p_{22}\Delta\theta V(q_{22})}{\rho}, \tag{7}$$

---

[8] 不失一般性，在此假设代理人的保留效用（reservation utility）为零。

[9] 实际上，Crémer and McLean (1988)指出激励相容约束可以为松弛约束。

$$t_{22}=\frac{(p_{11}p_{22}\bar{\theta}-p_{12}^{2}\underline{\theta})V(q_{22})+p_{11}p_{12}\Delta\theta V(q_{21})}{\rho}.\tag{8}$$

将以上各式代入卖方的期望利润 $\pi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q})$，然后对 q_{ij} 求一阶条件即可得次优消费量 $\boldsymbol{q}^{sb}(\rho)=(q_{11}^{sb}(\rho),q_{12}^{sb}(\rho),q_{21}^{sb}(\rho),q_{22}^{sb}(\rho))$，它们满足

$$\underline{\theta}V'[q_{11}^{sb}(\rho)]=\underline{\theta}V'[q_{12}^{sb}(\rho)]=\bar{\theta}V'[q_{21}^{sb}(\rho)]=\bar{\theta}V'[q_{22}^{sb}(\rho)].\tag{9}$$

拟线性形式的效用函数表明代理人对支付是风险中性的。委托人正是利用这种风险中性在不同状态下对他们施加“奖励”或“惩罚”以确保所有约束条件满足。比如，ρ 为正且较小时，一个 $\bar{\theta}$ 类型代理人面临这样的奖惩规定：如其讲真话而另一个代理人申报为 $\underline{\theta}$，则会受到奖励（$t_{11}<0$）；如果另一个代理人申报为 $\bar{\theta}$，则他会受到惩罚（$t_{12}>0$）。对 $\underline{\theta}$ 类型的代理人也有类似的规定。对于负相关的情形，奖惩方向相反。对任何不为零的相关度，一定存在可行的奖惩方案保证代理人总是会接受合约并如实申报自身类型。随着类型相关度不断减小，要求的奖惩额度越来越大，相关度趋近零时，要求委托人施以无限大的奖励或无限严厉的惩罚。这种机制背后的经济直觉是：虽然委托人不了解代理人的类型，但是可以根据他们之间的类型相关性对他们所申报的信息加以交互验证（cross-checking），以判断他们是否谎报，继而施以奖惩。[10]只要规定适当的奖惩额度，代理人都会接受合约且诚实申报信息。因此，委托人可以完全抽取代理人的信息租金。

（二）类型不相关情形

对类型独立情形，令 $v=\Pr(\theta_i=\underline{\theta}),i=1,2$，则

$$p_{11}=v^2,\quad p_{12}=p_{21}=v(1-v),\quad p_{22}=(1-v)^2.$$

此时，约束条件（1）至（4）不可能同时取紧，应用求解单个代理人逆向选择问题的标准方法可以确定 $\bar{\theta}$ 类型的激励相容约束（2）和 $\underline{\theta}$ 的参与约束（3）为紧约束，将这两个约束条件代入卖方的目标函数，再对消费量加以优化可得 $\boldsymbol{q}^{sb}(0)$，它满足

$$\begin{aligned}\left(\underline{\theta}-\frac{1-v}{v}\Delta\theta\right)V'[q_{11}^{sb}(0)]&=\left(\underline{\theta}-\frac{1-v}{v}\Delta\theta\right)V'[q_{12}^{sb}(0)]\\&=\bar{\theta}V'[q_{21}^{sb}(0)]=\bar{\theta}V'[q_{22}^{sb}(0)]=c.\end{aligned}\tag{10}$$

由本节的分析可以发现，当代理人之间无合谋时，类型相关度会直接影响配置效率，并且在信息结构从相关逐渐过渡到不相关的过程中，委托人所

[10] 在现实中这种做法很常见，比如对卖方底价完全不了解的买方往往通过“货比三家”的做法防止上当受骗；而一个完全没有专业知识的上级也可以通过“兼听则明”实现对下属的有效领导。

能实现的配置效率呈现不连续变化。

四、具有信息操纵和套利的代理人最优化问题

上面的分析表明在类型相关时，代理人不会获得任何租金，这会使代理人产生通过结成联盟来操纵信息以便获得租金的激励。所以实现完全抽取的交互验证方法很容易诱发代理人间的合谋。本节中，我们给出第三方所面临的最优化问题，并导出防范合谋机制所应满足的条件。

定义 1 如支机制（side mechanism）

$$S=\{\phi(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2),x_1(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\phi),x_2(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\phi),y_1(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2),y_2(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)\},\quad (\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)\in\Theta^2$$

是以下规划问题（PT）的解，则称其相对于提供保留效用$\{U^M(\underline{\theta}),U^M(\bar{\theta})\}$的激励相容主机制 M 为联盟中期有效（coalition-interim-efficient）的，

$$(\mathrm{PT}):\max_{\phi(\cdot),x_i(\cdot),y_i(\cdot)}\sum_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta^2}p(\theta_1,\theta_2)[U^1(\theta_1)+U^2(\theta_2)],$$

其中：

$$U^i(\theta_i)=\sum_{\theta_j\in\Theta_j}p(\theta_j\mid\theta_i)[\theta_iV(x_i(\theta_i,\theta_j,\phi(\theta_i,\theta_j))+q_i(\phi(\theta_i,\theta_j)))$$
$$+y_i(\theta_i,\theta_j)-t_i(\phi(\theta_i,\theta_j))],$$

$\forall\theta_i\in\Theta,i,j=1,2,i\neq j$；

$$(\mathrm{BIC}_i^S):U^i(\theta_i)\geqslant U^i(\tilde{\theta}_i\mid\theta_i),$$

其中

$$U^i(\tilde{\theta}_i\mid\theta_i)=\sum_{\theta_j\in\Theta_i}p(\theta_j\mid\theta_i)[\theta_iV(x_i(\tilde{\theta}_i,\theta_j,\phi(\tilde{\theta}_i,\theta_j))+q_i(\phi(\tilde{\theta}_i,\theta_j)))$$
$$+y_i(\tilde{\theta}_i,\theta_j)-t_i(\phi(\tilde{\theta}_i,\theta_j))],$$

$\forall(\theta_i,\tilde{\theta}_i)\in\Theta^2,i,j=1,2,i\neq j$；

$$(\mathrm{BIR}_i^S):U^i(\theta_i)\geqslant U^M(\theta_i),$$

$\forall\theta_i\in\Theta,i=1,2$；

$$(\mathrm{BB}:y):\sum_{i=1}^{2}y_i(\theta_1,\theta_2)=0,$$

$$(\mathrm{BB}:x):\sum_{i=1}^{2}x_i(\theta_1,\theta_2,\tilde{\phi})=0,$$

$\forall(\theta_1,\theta_2)\in\Theta^2,\forall\tilde{\phi}\in\Theta^2$。

以

$$S^0\equiv\{\phi(\cdot)=Id(\cdot),x_1(\cdot)=x_2(\cdot)=0,y_1(\cdot)=y_2(\cdot)=0\}$$

表示空契约（null contract），此契约不对信息做任何操纵，也不对消费量做任何重新分配。换言之，如果第三方向代理人提供 S^0，则主契约 M 不受任何影响。

定义 2　一个激励相容的主机制 M 为弱防合谋（weakly collusion-proof）机制，当且仅当其为讲真话的直接显示机制（a truth-telling direct mechanism）且给定此主机制时第三方的最优反应是提供空契约 S^0。

命题 1　（弱防合谋原理）不失一般性，卖方可通过提供弱防合谋的主机制来实施博弈的任何精炼贝叶斯均衡。

证明　本命题的证明方法与 LM（2000）中命题 3 的证明方法类似，在此省略证明。

弱防合谋原理的经济学直觉与显示原理类似：由于第三方并不比卖方拥有更多信息，也无任何政策工具上的优势，所以卖方可以通过一个弱防范合谋的主机制模拟博弈的任何精炼贝叶斯均衡结果。

以下定理给出了弱防合谋主机制所必需满足的联盟激励相容约束（coalition incentive constraints）。

命题 2　$\underline{\theta}$ 类型代理人的激励相容约束非紧时，当且仅当存在 $\varepsilon\in[0,1)$ 使得以下各式成立时，贝叶斯激励相容主机制 M 为弱防合谋机制：

- 联盟激励相容约束：

对（$\underline{\theta}$,$\underline{\theta}$）型联盟，

$$\mathrm{CIC}(\underline{\theta},\underline{\theta};\underline{\theta},\bar{\theta}):2\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V(q_{11})-2t_{11}$$

$$\geqslant 2\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V\left(\frac{q_{12}+q_{21}}{2}\right)-t_{12}-t_{21}, \tag{11}$$

$$\mathrm{CIC}(\underline{\theta},\underline{\theta};\bar{\theta},\bar{\theta}):2\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V(q_{11})-2t_{11}$$

$$\geqslant 2\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V(q_{22})-2t_{22}; \tag{12}$$

对（$\underline{\theta}$,$\bar{\theta}$）型联盟

$$\mathrm{CIC}(\underline{\theta},\bar{\theta};\underline{\theta},\underline{\theta}):\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(\varphi_1(q_{12}+q_{21}))+\bar{\theta}V(\varphi_2(q_{12}+q_{21}))-t_{12}-t_{21}$$

$$\geqslant\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(\varphi_1(2q_{11}))+\bar{\theta}V(\varphi_2(2q_{11}))-2t_{11}, \tag{13}$$

$$\mathrm{CIC}(\underline{\theta},\bar{\theta};\bar{\theta},\bar{\theta}):\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(\varphi_1(q_{12}+q_{21}))+\bar{\theta}V(\varphi_2(q_{12}+q_{21}))-t_{12}-t_{21}$$

$$\geqslant\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(\varphi_1(2q_{22}))+\bar{\theta}V(\varphi_2(2q_{22}))-2t_{22}; \tag{14}$$

对 $(\bar{\theta},\bar{\theta})$ 型联盟

$$\mathrm{CIC}(\bar{\theta},\bar{\theta};\underline{\theta},\underline{\theta}):2\bar{\theta}V(q_{22})-2t_{22}\geqslant 2\bar{\theta}V(q_{11})-2t_{11},\tag{15}$$

$$\mathrm{CIC}(\bar{\theta},\bar{\theta};\underline{\theta},\bar{\theta}):2\bar{\theta}V(q_{22})-2t_{22}\geqslant 2\bar{\theta}V\left(\frac{q_{12}+q_{21}}{2}\right)-t_{12}-t_{21},\tag{16}$$

其中

$$(\varphi_1(x),\varphi_2(x))=\underset{x_1,x_2:x_1+x_2=x}{\operatorname{argmax}}\left[\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(x_1)+\bar{\theta}V(x_2)\right]\tag{17}$$

表示异质性联盟内部的最优再分配规则。

• 无套利约束（no-arbitrage-constraint）：

$$\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon}{p_{12}}\Delta\theta\right)V'(q_{12})=\bar{\theta}V'(q_{21}).\tag{18}$$

• 如 $\varepsilon>0$ 则在支契约中 $\bar{\theta}$ 类型代理人的激励相容约束为紧；如 $\varepsilon=0$ 则此约束为松弛约束。

证明 见附录。

如所有联盟激励约束都被满足，则第三方不会对代理人所申报的信息加以操纵。比如，如 $\mathrm{CIC}(\underline{\theta},\underline{\theta};\underline{\theta},\bar{\theta})$ 满足，则 $(\underline{\theta},\underline{\theta})$ 型联盟会讲真话而不是汇报成 $(\underline{\theta},\bar{\theta})$。如无套利约束（18）满足，则第三方不会在异质性联盟内部重新分配产品；在同质性联盟 $(\underline{\theta},\underline{\theta})$ 或 $(\bar{\theta},\bar{\theta})$ 内部第三方要求平分消费量，而对称性假设下两个买方在主契约中获得的消费量本来相同：$q_1(\underline{\theta},\underline{\theta})=q_2(\underline{\theta},\underline{\theta})$，$q_1(\bar{\theta},\bar{\theta})=q_2(\bar{\theta},\bar{\theta})$，所以在同质性联盟内部不会发生再分配。因此，对称性假设和条件（11）至（18）给出了所有防范合谋约束。

在非对称信息下的联盟激励约束中，代理人对产品的实际评价（real valuation）被实质性评价（virtual valuations）取代。一个 $\bar{\theta}$ 类型代理人的实质性评价总是与其实际评价相同的：$\bar{\theta}^v=\bar{\theta}$。而 $\underline{\theta}$ 类型代理人的实质性评价则低于其实际评价：$\underline{\theta}^v\leqslant\underline{\theta}$。在同质性联盟 $(\underline{\theta},\underline{\theta})$ 中，$\underline{\theta}^v=\underline{\theta}-\dfrac{p_{12}^2\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}$；而在异质性联盟 $(\underline{\theta},\bar{\theta})$ 中，$\underline{\theta}^v=\underline{\theta}-\dfrac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}$。显然，如 $\rho=0$，这两种联盟中的实质性评价相同。

如在第三方的规划问题中 $\bar{\theta}$ 类型代理人的激励相容约束为紧约束，则参数 $\varepsilon>0$，否则 $\varepsilon=0$。ε 反映了合谋的交易成本或称联盟形成过程中的摩擦因素。这是因为合谋双方都不能完全信任对方而与其分享信息，从而使合谋过程中产生交易成本而影响合谋效率。如果合谋双方可完全分享彼此的信息，则合谋在对称信息下进行，此时合谋效率达到最大，相应的，在约束（11）

至（18）中 $\varepsilon=0$。

如果买方仅能对信息加以操纵而无法对消费量加以重新分配，则以上的条件（11）—（16）应作相应变化，我们有如下推论。

推论 1　$\underline{\theta}$ 类型代理人的激励相容约束非紧时，当且仅当存在 $\varepsilon\in[0,1)$ 使得以下各联盟激励约束成立时，贝叶斯激励相容主机制 M 为弱防合谋机制：

- 对（$\underline{\theta},\underline{\theta}$）型联盟

$$\begin{aligned}\mathrm{CIC}(\underline{\theta},\underline{\theta};\underline{\theta},\bar{\theta}):&2\left(\underline{\theta}-\frac{P_{12}^{2}\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V(q_{11})-2t_{11}\\&\geqslant\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)[V(q_{12})+V(q_{21})]-t_{12}-t_{21},\end{aligned}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{CIC}(\underline{\theta},\underline{\theta};\bar{\theta},\bar{\theta}):&2\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V(q_{11})-2t_{11}\\&\geqslant2\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V(q_{22})-2t_{22};\end{aligned}\tag{20}$$

- 对（$\underline{\theta},\bar{\theta}$）型联盟

$$\begin{aligned}\mathrm{CIC}(\underline{\theta},\bar{\theta};\underline{\theta},\underline{\theta}):&\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(q_{12})+\bar{\theta}V(q_{21})-t_{12}-t_{21}\\&\geqslant\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(q_{11})+\bar{\theta}V(q_{11})-2t_{11},\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{CIC}(\underline{\theta},\bar{\theta};\bar{\theta},\bar{\theta}):&\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(q_{12})+\bar{\theta}V(q_{21})-t_{12}-t_{21}\\&\geqslant\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(q_{22})+\bar{\theta}V(q_{22})-2t_{22};\end{aligned}\tag{22}$$

- 对（$\bar{\theta},\bar{\theta}$）型联盟

$$\mathrm{CIC}(\bar{\theta},\bar{\theta};\underline{\theta},\underline{\theta}):2\bar{\theta}V(q_{22})-2t_{22}\geqslant2\bar{\theta}V(q_{11})-2t_{11},\tag{23}$$

$$\mathrm{CIC}(\bar{\theta},\bar{\theta};\underline{\theta},\bar{\theta}):2\bar{\theta}V(q_{22})-2t_{22}\geqslant\bar{\theta}[V(q_{12})+V(q_{21})]-t_{12}-t_{21}.\tag{24}$$

证明　见附录。

为方便进一步的表述，我们先引入一些新的符号。

$$\pi^{\mathrm{fb}}(\rho)=\max_{\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{q}\}}\pi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q}\mid\rho),\quad \text{s.t.}\,(3),(4),\tag{25}$$

$$\pi^{\mathrm{sb}}(\rho)=\max_{\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{q}\}}\pi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q}\mid\rho),\quad \text{s.t.}\,(1),(2),(3),(4),\tag{26}$$

$$\pi^{\mathrm{tb}}(\rho)=\max_{\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{q}\in[0,1)\}}\pi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q},\varepsilon\mid\rho),\quad \text{s.t.}\,(1),(2),(3),(4),(19)\text{—}(24),\tag{27}$$

$$\pi^{\mathrm{fob}}(\rho)=\max_{\{\boldsymbol{t},\boldsymbol{q}\in[0,1)\}}\pi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q},\varepsilon\mid\rho),\quad \text{s.t.}\,(1),(2),(3),(4),(11)\text{—}(18),\tag{28}$$

$\pi^{fb}(\rho),\pi^{sb}(\rho),\pi^{tb}(\rho),\pi^{fob}(\rho)$ 分别表示完全信息下，非对称信息但无合谋情形下，存在信息操纵但无套利情形下以及既有信息操纵又有套利情形下卖方所获得的最大收益。相应的，分别以 $M^i(\rho)=(\boldsymbol{t}^i(\rho),\boldsymbol{q}^i(\rho)),i=\mathrm{fb,sb,tb,fob}$ 表示这几种情形下的定价合约。[11]

比较约束条件（11）—（18）与（19）—（24）可得以下命题。

命题 3 以上几种情形下的卖方收益满足：$\pi^{fb}(\rho)\geqslant\pi^{sb}(\rho)\geqslant\pi^{tb}(\rho)\geqslant\pi^{fob}(\rho)$，$\rho\neq0$ 时，第一个不等式取等号。

证明 见附录。

五、具有信息操纵的最优弱防合谋机制

当买方可能通过联盟操纵信息但不能对消费量进行重新分配（套利）时，最优弱防范合谋机制应为规划问题（27）的最优解。

以下三个命题分别给出了类型负相关、正相关和不相关情形下的最优弱防范合谋机制，它们推广了 LM（2000）的结果。

命题 4 当代理人之间的类型为弱负相关[12]且条件 $V(\underline{q})-V(\bar{q})-\dfrac{C\Delta\theta V'(\bar{q})}{2\bar{\theta}^2V''(\bar{q})}<0$ 满足时，[13]卖方应选取 $\varepsilon=1$，在最优弱防合谋机制 $M^{tb}(\rho)=\{\boldsymbol{t}^{tb}(\rho),\boldsymbol{q}^{tb}(\rho)\}$ 中：

- 消费向量 $\boldsymbol{q}^{tb}(\rho)\in\mathbb{R}^4_+$ 满足：$q^{tb}_{11}(\rho)<q^{tb}_{12}(\rho)<q^{tb}_{22}(\rho)<q^{tb}_{21}(\rho)$，具体的，

$$\left[\frac{\underline{\theta}p_{12}-p_{22}\Delta\theta}{\rho+p_{12}}+\rho\frac{\bar{\theta}-(1-p_{11})\left(\underline{\theta}-\dfrac{p_{12}^2\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho}\right)}{p_{11}(\rho+p_{12})}\right]V'[q^{tb}_{11}(\rho)]=c,\quad(29)$$

$$\left[\frac{\underline{\theta}p_{12}-p_{22}\Delta\theta}{\rho+p_{12}}+\rho\frac{(1-p_{11})\left(\underline{\theta}-\dfrac{p_{12}^2\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho}\right)-p_{22}\left(\underline{\theta}-\dfrac{p_{22}\Delta\theta}{p_{12}}\right)}{2(\rho+p_{12})p_{12}}\right]V'[q^{tb}_{12}(\rho)]=c,\quad(30)$$

$$\left[\frac{\bar{\theta}p_{12}}{\rho+p_{12}}+\rho\frac{(1-p_{11})\left(\underline{\theta}-\dfrac{p_{12}^2\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho}\right)-p_{22}\bar{\theta}}{2(\rho+p_{12})p_{12}}\right]V'[q^{tb}_{21}(\rho)]=c,\quad(31)$$

---

[11] 上标 fb、sb、tb 和 fob 分别代表“first-best”、“second-best”、“third-best”和“fourth- best”。

[12] 弱负相关是指 $\rho<0$ 且充分靠近零。

[13] $\underline{q}$ 和 $\bar{q}$ 分别由 $\left(\underline{\theta}-\dfrac{p_{22}\Delta\theta}{p_{12}}\right)V'(\underline{q})=c$ 和 $\bar{\theta}V'(\bar{q})=c$ 给出。这个条件表明函数 $V(\cdot)$ 递增性足够强或者凹性足够强。

$$\left[\frac{\bar{\theta}p_{12}}{\rho+p_{12}}+\rho\frac{\bar{\theta}+\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\Delta\theta}{p_{12}}\right)}{2(\rho+p_{12})}\right]V'[q_{22}^{\mathrm{tb}}(\rho)]=c. \tag{32}$$

- 支付向量 $\boldsymbol{t}^{tb}(\rho)\in\mathbb{R}^4$ 使得（2）、（3）、（19）、（22）为紧约束。

证明 见附录。

负相关情形下，为了防范联盟（$\underline{\theta},\underline{\theta}$）谎报成（$\underline{\theta},\bar{\theta}$），$t_{11}$不能随着相关度减小而无限增大；而为了防止（$\underline{\theta},\bar{\theta}$）谎报成（$\bar{\theta},\bar{\theta}$），$t_{22}$也不可能无限减小。向上的联盟激励约束（19）、（20）和（22）与完全抽租机制中的无限奖惩方案冲突。条件 $V(\underline{q})-V(\bar{q})-\frac{c\Delta\theta V'(\bar{q})}{2\bar{\theta}^2V''(\bar{q})}<0$ 和 $q_{11}^{\mathrm{tb}}(\rho)<q_{12}^{\mathrm{tb}}(\rho)<q_{22}^{\mathrm{tb}}(\rho)<q_{21}^{\mathrm{tb}}(\rho)$[14] 满足时，局部联盟约束（19）比全局联盟约束（20）更难以满足，所以最优防范合谋机制要求（19）和（22）为紧约束。

在最优机制中，卖方应选择 $\varepsilon=1$，选择严格小于 1 的 ε 只会使条件（19）更难以满足。这说明在由不同类型买方组成的联盟内部合谋交易成本比较大，这是由于合谋双方都推断对方很可能具有与自己不同的类型，所以不愿彼此分享信息。卖方虽然不能实施无合谋时的配置结果，但可以利用买方之间的这种“分歧”尽量增加他们之间的交易成本以阻止合谋的发生。

命题 5 当代理人之间的类型为弱正相关时，卖方选取 $\varepsilon=1$，在最优弱防合谋机制 $M^{\mathrm{tb}}(\rho)=\{\boldsymbol{t}^{\mathrm{tb}}(\rho),\boldsymbol{q}^{\mathrm{tb}}(\rho)\}$ 中：

- 消费向量 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{tb}}(\rho)\in\mathbb{R}_+^4$ 满足：$q_{12}^{\mathrm{tb}}(\rho)<q_{11}^{\mathrm{tb}}(\rho)<q_{21}^{\mathrm{tb}}(\rho)=q_{22}^{\mathrm{tb}}(\rho)$，具体的，

$$\left[\left(\frac{\underline{\theta}p_{12}-p_{22}\Delta\theta}{\rho+p_{12}}\right)+\rho\frac{\bar{\theta}-p_{12}\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\Delta\theta}{p_{12}}+\bar{\theta}\right)-p_{22}\bar{\theta}}{(\rho+p_{12})p_{11}}\right]V'[q_{11}^{\mathrm{tb}}(\rho)]=c, \tag{33}$$

$$\left[\left(\frac{\underline{\theta}p_{12}-p_{22}\Delta\theta}{\rho+p_{12}}\right)+\rho\frac{\underline{\theta}-\frac{p_{22}\Delta\theta}{p_{12}}}{\rho+p_{12}}\right]V'[q_{12}^{\mathrm{tb}}(\rho)]=c, \tag{34}$$

$$\bar{\theta}V'[q_{21}^{\mathrm{tb}}(\rho)]=\bar{\theta}V'[q_{22}^{\mathrm{tb}}(\rho)]=c. \tag{35}$$

- 支付向量 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{tb}}(\rho)\in\mathbb{R}^4$ 应保证约束条件（2）、（3）、（21）、（23）为紧约束。

证明 见附录。

$\rho>0$ 且很小时，对联盟（$\bar{\theta},\bar{\theta}$）和（$\bar{\theta},\underline{\theta}$）的激励约束限制了卖方的政策选择，使其不能用完全抽租机制通过无限惩罚或奖励来无成本地诱导代理人真实的信息显示。欲实现完全抽取要求 t_{11}、t_{21} 无限减小，而 t_{12}、t_{22} 无限增大，

[14] 这个关于消费量的单调关系可求解后验证。

这必然与向下的联盟激励约束（21）、（23）和（24）相冲突。当（21）取得等号时，在条件 $q_{11}^{tb}(\rho)>q_{12}^{tb}(\rho)$[15] 下，（23）的右端大于（24）的右端，所以（23）比（24）更加难以满足，因此最优弱防合谋机制要求（21）和（23）为紧约束。

在最优机制中，卖方应选择 $\varepsilon=1$，选择严格小于1的 ε 只会使条件（19）更难以满足。这说明在由不同类型买方组成的联盟内部合谋交易成本比较大，这是由于合谋双方都推断对方很可能具有与自己不同的类型，所以不愿彼此分享信息。卖方虽然不能实施无合谋时的配置结果，但可以利用买方之间的这种“分歧”，尽量增加他们之间的交易成本以阻止合谋的发生。

在一个公共物品提供模型中，LM（2000）给出了与以上命题类似的弱正相关情形下的防范合谋机制（LM（2000）的命题5），但在他们模型中的产量向量 $\boldsymbol{x}=(\bar{x},\hat{x},\underline{x})$ 比本文中的 $\boldsymbol{q}$ 低一个维度，这是因为在状态（$\underline{\theta},\bar{\theta}$）或（$\bar{\theta}$，$\underline{\theta}$）下，代理人面临统一的公共品提供量 $\hat{x}=x(\underline{\theta},\bar{\theta})=x(\bar{\theta},\underline{\theta})$。因为代理人之间的“分歧”较小，所以在他们的模型中，类型为弱正相关时合谋交易成本也较小（$\varepsilon=0$）。而在本文中，在状态（$\underline{\theta},\bar{\theta}$）或（$\bar{\theta},\underline{\theta}$）下两个代理人所获得的消费量 q_{12} 和 q_{21} 不相等，这种固有的“分歧”加大了合谋交易的成本（$\varepsilon=1$）。在LM（2002）中，两个局部向下的激励相容约束取紧；而本命题中取紧的是向下的局部联盟激励约束（21）和全局联盟激励约束（23）。

命题6 $\rho=0$ 时，选取任意 $\varepsilon\in[0,1)$ 对卖方都是无差异的，最优弱防范合谋机制 $M^{tb}(0)=\{\boldsymbol{t}^{tb}(0),\boldsymbol{q}^{tb}(0)\}$ 为：

- 消费量与无合谋情形下相同：$\boldsymbol{q}^{tb}(0)=\boldsymbol{q}^{sb}(0)$。
- 转移支付向量 $\boldsymbol{t}^{tb}(0)$ 使得约束（2）和（3）为紧约束。

证明 见附录

命题6表明，类型不相关情形下，买方间的信息操纵可以被无成本地防范。通过将命题4、5、6中给出的无套利情形下的最优弱防范合谋机制 $M^{tb}(\rho)$ 与最优 $M^{fb}(\rho)$ 和次优合约 $M^{sb}(\rho)$ 加以比较，我们容易得出以下推论。

推论2

- 同无合谋情形下相比，$\rho>0$ 时，$q_{11}^{tb}(\rho)$、$q_{12}^{tb}(\rho)$ 被向下扭曲，而 $q_{21}^{tb}(\rho)$、$q_{22}^{tb}(\rho)$ 不发生扭曲；$\rho<0$ 时，$q_{11}^{tb}(\rho)$、$q_{12}^{tb}(\rho)$ 被向下扭曲，而 $q_{21}^{tb}(\rho)$、$q_{22}^{tb}(\rho)$ 发生向上扭曲；

$$q_{11}^{tb}(\rho)\begin{cases}<q_{11}^{sb}(\rho)=q_{11}^{fb}(\rho), & \text{若 } \rho>0,\\ =q_{11}^{sb}(\rho)<q_{11}^{fb}(\rho), & \text{若 } \rho=0,\\ <q_{11}^{sb}(\rho)=q_{11}^{fb}(\rho), & \text{若 } \rho<0;\end{cases} \tag{36}$$

[15] 可以事先假设这种关系成立，待求解后再行验证。

$$q_{12}^{\mathrm{tb}}(\rho)\begin{cases}< q_{12}^{\mathrm{sb}}(\rho)=q_{12}^{\mathrm{fb}}(\rho), & 若\ \rho>0,\\ = q_{12}^{\mathrm{sb}}(\rho)< q_{12}^{\mathrm{fb}}(\rho), & 若\ \rho=0,\\ < q_{12}^{\mathrm{sb}}(\rho)=q_{12}^{\mathrm{fb}}(\rho), & 若\ \rho<0;\end{cases}\tag{37}$$

$$q_{21}^{\mathrm{tb}}(\rho)\begin{cases}= q_{21}^{\mathrm{sb}}(\rho)=q_{21}^{\mathrm{fb}}(\rho), & 若\ \rho>0,\\ = q_{21}^{\mathrm{sb}}(\rho)= q_{21}^{\mathrm{fb}}(\rho), & 若\ \rho=0,\\ > q_{21}^{\mathrm{sb}}(\rho)=q_{21}^{\mathrm{fb}}(\rho), & 若\ \rho<0;\end{cases}\tag{38}$$

$$q_{22}^{\mathrm{tb}}(\rho)\begin{cases}= q_{22}^{\mathrm{sb}}(\rho)=q_{22}^{\mathrm{fb}}(\rho), & 若\ \rho>0,\\ = q_{22}^{\mathrm{sb}}(\rho)= q_{22}^{\mathrm{fb}}(\rho), & 若\ \rho=0,\\ > q_{22}^{\mathrm{sb}}(\rho)=q_{22}^{\mathrm{fb}}(\rho), & 若\ \rho<0.\end{cases}\tag{39}$$

- $\rho\neq 0$ 时，合谋行为会严格降低卖方的收益，但 $\rho=0$ 时，合谋可被无成本防范

$$\pi^{\mathrm{tb}}(\rho)\begin{cases}< \pi^{\mathrm{sb}}(\rho)=\pi^{\mathrm{fb}}(\rho), & 若\ \rho\neq 0,\\ = \pi^{\mathrm{sb}}(\rho)<\pi^{\mathrm{fb}}(\rho), & 若\ \rho=0.\end{cases}\tag{40}$$

- 消费量 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{tb}}(\rho)$ 和卖方收益 $\pi^{\mathrm{tb}}(\rho)$ 随着 ρ 的变化呈连续变化：

$$\lim_{\rho\downarrow 0} q_{ij}^{\mathrm{tb}}(\rho)=\lim_{\rho\uparrow 0} q_{ij}^{\mathrm{tb}}(\rho)=q_{ij}^{\mathrm{tb}}(0)=q_{ij}^{\mathrm{sb}}(0),\tag{41}$$

$$\lim_{\rho\downarrow 0} \pi^{\mathrm{tb}}(\rho)=\lim_{\rho\uparrow 0} \pi^{\mathrm{tb}}(\rho)=\pi^{\mathrm{tb}}(0)=\pi^{\mathrm{sb}}(0).\tag{42}$$

证明　见附录。

六、同时具有信息操纵和套利时的最优弱防合谋机制

当买方可以进行联盟内部套利时，最优弱防范合谋机制 $M^{\mathrm{fob}}(\rho)$ 应为规划问题（28）的最优解。求解该问题之前我们需确定哪些约束为紧约束，为了简化计算，我们给出如下可实施性条件（implementability conditions）。

引理 1　在弱相关条件下，满足条件（11）至（16）的可实施消费量应满足以下不等式：

$$q_{11}\leqslant\frac{q_{12}+q_{21}}{2}\leqslant q_{22}.\tag{43}$$

证明　见附录。

如该条件成立，则在弱相关假设下求解规划问题（28）时，只需考虑 $\bar{\theta}$ 类型买方的激励相容约束（2）；$\underline{\theta}$ 类型买方的参与约束（3）；两个向上的局部联盟激励约束（11），（14）或者两个向下的局部联盟激励约束（13）、（16），无套利约束（18）以及可实施性条件（43）即可。则规划问题（28）可以简

化为：

$$\max_{\{t,q,\varepsilon\}} \pi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q},\varepsilon), \quad \text{s.t.}(2),(3),(11),(14),(18),(43), \quad \varepsilon \in [0,1) \tag{44}$$

或者

$$\max_{\{t,q,\varepsilon\}} \pi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q},\varepsilon), \quad \text{s.t.}(2),(3),(13),(16),(18),(43), \quad \varepsilon \in [0,1). \tag{45}$$

以下两个命题指出规划问题（44）和（45）的最优解分别是负相关和正相关情形下的弱防合谋机制。

命题 7 在弱负相关情形下，$\varepsilon=1$ 是卖方的最优选择。在最优弱防合谋机制 $M^{\text{fob}}(\rho)$ 中

- 消费量满足 $q_{11}^{\text{fob}}(\rho)<\dfrac{q_{12}^{\text{fob}}(\rho)+q_{21}^{\text{fob}}(\rho)}{2}<q_{22}^{\text{fob}}(\rho)$，具体的：

$$\left(\frac{\bar{\theta}p_{12}}{\rho+p_{12}}\right)V'(q_{22})+\frac{\rho\bar{\theta}V'(\varphi_2(2q_{22}))}{\rho+p_{12}}=c, \tag{46}$$

$$\left(\frac{\bar{\theta}p_{12}}{\rho+p_{12}}\right)V'(q_{21})+\frac{\rho\left[(1-p_{11})V'\left(\frac{q_{12}+q_{21}}{2}\right)\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^2\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho}\right)-p_{22}\bar{\theta}V'(q_{21})\right]}{2(\rho+p_{12})p_{12}}=c, \tag{47}$$

$$\left(\frac{\underline{\theta}p_{12}-p_{22}\Delta\theta}{\rho+p_{12}}\right)V'(q_{12})+\frac{\rho\left[(1-p_{11})V'\left(\frac{q_{12}+q_{21}}{2}\right)\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^2\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho}\right)-p_{22}\bar{\theta}V'(q_{21})\right]}{2(\rho+p_{12})p_{12}}=c, \tag{48}$$

$$\left[\frac{\underline{\theta}p_{12}-p_{22}\Delta\theta}{\rho+p_{12}}+\frac{\rho\bar{\theta}}{(\rho+p_{12})p_{11}}-\frac{\rho(1-p_{11})\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^2\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho}\right)}{p_{11}(\rho+p_{12})}\right]V'(q_{11})=c. \tag{49}$$

- 支付向量 $\boldsymbol{t}^{\text{fob}}\in\mathbb{R}^4$ 使得约束（2）、（3）、（11）、（14）取等号。
- 卖方的收益严格低于无套利情形下 $\pi^{\text{fob}}(\rho)<\pi^{\text{tb}}(\rho)$。

当类型 ρ 为负且接近于零时，完全抽取机制要求 t_{11} 无限增大，而 t_{22} 无限减小，这必然与联盟激励约束（11）和（14）相冲突，这种冲突导致弱防范合谋机制中（11）和（14）为紧约束。

$\varepsilon=1$ 是卖方的最优选择，减小 ε 只会增加约束（11）的满足成本。此时买方之间虽然可以进行套利，但由于联盟由相异类型者组成的可能性较大，所以联盟内部交易成本也是较大的。

命题 8 买方之间类型为弱正相关时，卖方应选择 $\varepsilon=0$。在最优弱防合谋机制 $M^{\text{fob}}(\rho)$ 中，

- 消费量向量 $\boldsymbol{q}^{\text{fob}}(\rho)$ 满足 $q_{11}^{\text{fob}}(\rho)<q_{12}^{\text{fob}}(\rho)<q_{21}^{\text{fob}}(\rho)<q_{22}^{\text{fob}}(\rho)$，具体的：

$$\left[\frac{\underline{\theta}p_{12}-p_{22}\Delta\theta}{\rho+p_{12}}+\frac{\rho\bar{\theta}}{(\rho+p_{12})p_{11}}\right]V'(q_{11})-\frac{\rho(1-p_{11})}{p_{11}(\rho+p_{12})}\bar{\theta}V'(\varphi_2(2q_{11}))=c, \tag{50}$$

$$\left(\frac{\underline{\theta}p_{12}-p_{22}\Delta\theta}{\rho+p_{12}}\right)V'(q_{12})+\rho\left[\frac{(1-p_{11})\underline{\theta}V'(q_{12})-p_{22}\bar{\theta}V'\left(\frac{q_{12}+q_{21}}{2}\right)}{2(\rho+p_{12})p_{12}}\right]-\lambda\underline{\theta}V''(q_{12})=c, \tag{51}$$

$$\left(\frac{\bar{\theta}p_{12}}{\rho+p_{12}}\right)V'(q_{21})+\rho\left[\frac{(1-p_{11})\bar{\theta}V'(q_{21})-p_{22}\bar{\theta}V'\left(\frac{q_{21}+q_{21}}{2}\right)}{2(\rho+p_{12})p_{12}}\right]+\lambda\bar{\theta}V''(q_{21})=c, \tag{52}$$

$$\bar{\theta}V'(q_{22})=c, \tag{53}$$

其中，正值参数 λ 保证 $\underline{\theta}V'[q_{12}^{\mathrm{fob}}(\rho)]=\bar{\theta}V'[q_{21}^{\mathrm{fob}}(\rho)]$ 成立；

- 支付向量 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{fob}}\in\mathbb{R}^4$ 保证约束条件（2）、（3）、（13）、（16）为紧约束。
- 卖方的收益严格低于无套利情形下 $\pi^{\mathrm{fob}}(\rho)<\pi^{\mathrm{tb}}(\rho)$。

证明　见附录。

完全抽租机制中对 t_{22} 无限增大和 t_{11} 无限减小的要求分别与联盟激励约束（16）和（13）相矛盾，这导致以上两约束为紧。卖方的最优选择为 $\varepsilon=0$，选择 $\varepsilon>0$ 只会令（13）更加难以满足。类型为正相关且买方之间可以进行套利活动时，联盟内部的交易成本为零。此时联盟激励约束与完全信息下相同，但买方的个体激励约束和参与约束仍为中期形式，这与完全信息下的情形不同。同命题 4、5 和 7 比较发现，类型正相关和套利可能性是使联盟交易成本降为零的必要因素，二者缺一不可。

因为 $\varepsilon=0$，仅在约束条件（1）—（4）以及（11）—（16）下求出的最优解不能满足无套利约束（18）。一方面，套利可能性改变了联盟约束的形式进而降低了卖方的收益；[16] 另一方面，存在套利可能性时买方应考虑额外的无套利约束（18），而这个约束与其他约束条件相冲突，这会进一步降低卖方收益。套利可能性和类型正相关导致合谋交易成本大大降低，这会使合谋更加难以防范从而使卖方的收益严格低于无套利的情形。

当 ρ 退化为零时，我们有以下结论。

命题 9　买方之间类型不相关时，存在支付向量 $\boldsymbol{t}^{\mathrm{fob}}(0)\in\mathbb{R}^4$ 使弱防范合谋机制及卖方收益与无套利机制与无合谋机制相同：$M^{\mathrm{fob}}(0)=M^{\mathrm{tb}}(0)=M^{\mathrm{sb}}(0)$，$\pi^{\mathrm{fob}}(0)=\pi^{\mathrm{tb}}(0)=\pi^{\mathrm{sb}}(0)$。

[16] （11）—（16）的右端分别大于（19）—（24）的右端。

证明 见附录。

以上命题的结论与JM（2005）的主要结论相同，它说明如果买方之间完全不相关，则套利活动不会影响合约形式和卖方收益。

通过将有套利情形下的定价合约 $M^{fob}(\rho)$ 与无套利合约 $M^{tb}(\rho)$ 以及无合谋合约 $M^{sb}(\rho)$ 加以比较可得以下推论。

推论3

• 同无合谋情形下的最优机制 $M^{sb}(\rho)$ 相比，$\rho>0$ 时，q_{11}^{fob}、q_{12}^{fob}、q_{21}^{fob} 被向下扭曲，而 q_{22}^{fob} 不发生扭曲；$\rho<0$ 时，q_{11}^{fob}、q_{12}^{fob} 被向下扭曲，而 q_{21}^{fob}、q_{22}^{fob} 发生向上扭曲；

$$q_{11}^{fob}(\rho)\begin{cases}<q_{11}^{sb}(\rho)=q_{11}^{fb}(\rho), & 若\ \rho>0,\\ =q_{11}^{sb}(\rho)<q_{11}^{fb}(\rho), & 若\ \rho=0,\\ <q_{11}^{sb}(\rho)=q_{11}^{fb}(\rho), & 若\ \rho<0;\end{cases} \tag{54}$$

$$q_{12}^{fob}(\rho)\begin{cases}<q_{12}^{sb}(\rho)=q_{12}^{fb}(\rho), & 若\ \rho>0,\\ =q_{12}^{sb}(\rho)<q_{12}^{fb}(\rho), & 若\ \rho=0,\\ <q_{12}^{sb}(\rho)=q_{12}^{fb}(\rho), & 若\ \rho<0;\end{cases} \tag{55}$$

$$q_{21}^{sb}(\rho)\begin{cases}<q_{21}^{sb}(\rho)=q_{21}^{fb}(\rho), & 若\ \rho>0,\\ =q_{21}^{sb}(\rho)<q_{21}^{fb}(\rho), & 若\ \rho=0,\\ >q_{21}^{sb}(\rho)=q_{21}^{fb}(\rho), & 若\ \rho<0;\end{cases} \tag{56}$$

$$q_{22}^{fob}(\rho)\begin{cases}=q_{22}^{sb}(\rho)=q_{22}^{fb}(\rho), & 若\ \rho>0,\\ =q_{22}^{sb}(\rho)<q_{22}^{fb}(\rho), & 若\ \rho=0,\\ >q_{22}^{sb}(\rho)=q_{22}^{fb}(\rho), & 若\ \rho<0.\end{cases} \tag{57}$$

• 消费量函数 $q_{11}^{fob}(\rho)$、$q_{22}^{fob}(\rho)$ 在 $\rho=0$ 处连续；但 $q_{12}^{fob}(\rho)$、$q_{21}^{fob}(\rho)$ 在 $\rho=0$ 处仅左侧连续而右侧不连续

$$\lim_{\rho\uparrow 0} q_{ij}^{fob}(\rho)=q_{ij}^{fob}(0)=q_{ij}^{tb}(0)=q_{ij}^{sb}(0), \tag{58}$$

$$\lim_{\rho\downarrow 0} q_{11}^{fob}(\rho)=q_{11}^{fob}(0)=q_{12}^{tb}(0)=q_{12}^{sb}(0), \tag{59}$$

$$\lim_{\rho\downarrow 0} q_{22}^{fob}(\rho)=q_{22}^{fob}(0)=q_{22}^{tb}(0)=q_{22}^{sb}(0), \tag{60}$$

$$\lim_{\rho\downarrow 0} q_{12}^{fob}(\rho)>q_{12}^{fob}(0)=q_{12}^{tb}(0)=q_{12}^{sb}(0), \tag{61}$$

$$\lim_{\rho\downarrow 0} q_{21}^{fob}(\rho)<q_{21}^{fob}(0)=q_{21}^{tb}(0)=q_{21}^{sb}(0). \tag{62}$$

• 卖方的收益函数在 ρ 处左侧连续而右侧不连续：

$$\lim_{\rho\downarrow 0}\pi^{fob}(\rho)<\pi^{fob}(0),\quad \lim_{\rho\uparrow 0}\pi^{fob}(\rho)=\pi^{fob}(0). \tag{63}$$

在弱正相关情形下，（2）和（13）要求 q_{11} 向下扭曲，（2）和（16）要求 q_{12} 向下扭曲，而（16）要求 q_{21} 向下扭曲。类型正相关时，两个买方具有相同类型的可能性较大，无套利约束（18）要求 q_{12} 和 q_{21} 间的差异不应太大，所以相对于无套利合约 $M^{\mathrm{tb}}(\rho)$，q_{12} 的扭曲较小，而 q_{21} 的扭曲量较大。

在弱负相关情形下，约束（2）和（14）要求 q_{11} 向下扭曲，而（3）和（11）要求 q_{11} 向上扭曲，当 ρ 很小时，前者的作用大于后者，所以 q_{11} 发生向下扭曲。类似的可解释 q_{12} 的向下扭曲和 q_{21} 与 q_{22} 的向上扭曲。这种扭曲使 q_{12} 和 q_{21} 产生了较大差异，而类型负相关时的无套利约束恰恰要求 q_{12} 和 q_{21} 存在较大差异，从而（18）可被自动满足。

从上文中（42）和（63）可见，$\rho<0$ 时，$\pi^{\mathrm{fob}}(\rho)$ 和 $\pi^{\mathrm{tb}}(\rho)$ 之间的差异将随 ρ 的减小而逐渐消失：

$$\lim_{\rho\uparrow 0}\left[\pi^{\mathrm{fob}}(\rho)-\pi^{\mathrm{tb}}(\rho)\right]=0;$$

而 $\rho>0$ 时，这种差异不能消失：

$$\lim_{\rho\downarrow 0}\left[\pi^{\mathrm{fob}}(\rho)-\pi^{\mathrm{tb}}(\rho)\right]<0.$$

七、结　　论

根据 CM（1985，1988）的完全抽租定理，在非线性定价环境中，卖方可以利用代理人类型的相关性完全抽取他们的信息租金，获得最优利润。而代理人会操纵信息和重新分配产品来保护其租金，这使卖方无法实现最优利润。此时，作为机制设计者的卖方要面临两项任务：一是防范信息操纵；二是防范联盟内部套利。这导致最优弱防范合谋机制偏离 LM（2000）所提出的机制，因为在他们的问题中只需考虑第一项任务。我们发现，存在套利可能性时，弱防范合谋机制的形式取决于类型相关度的符号。类型不相关时，买方之间的套利活动不会影响买方利润，卖方仍然实现次优收益。当类型相关时，相对于无套利情形，收益发生向下扭曲。但是在正、负相关情形下，收益扭曲的方式不同。类型之间弱负相关时，虽然收益发生扭曲，但这种扭曲会随着类型相关度的减弱而趋于消失；而类型为弱正相关时，套利造成的配置扭曲不能因类型相关度的减弱而消失。

附　录

首先我们引入以下符号：

$$\phi_{11}=\phi(\underline{\theta},\underline{\theta}),\quad \phi_{12}=\phi(\underline{\theta},\bar{\theta}),\quad \phi_{21}=\phi(\bar{\theta},\underline{\theta}),\quad \phi_{22}=\phi(\bar{\theta},\bar{\theta}).$$

第三方所面临的最优化问题可表示成：

$$\max_{\phi(\cdot),x_i(\cdot),y_i(\cdot)} \sum_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta^2} p(\theta_1,\theta_2)\left\{\sum_{i=1,2}[\theta_i V(x_i(\theta_1,\theta_2,\phi(\theta_1,\theta_2))\right.$$
$$\left. + q_i(\phi(\theta_1,\theta_2))) - t_i(\phi(\theta_1,\theta_2))]\right\} \quad \text{s. t.}$$

• 预算平衡约束：

$$(\mathrm{BB}:y)\sum_{k=1,2} y_k(\theta_1,\theta_2) = 0, \tag{64}$$

$$(\mathrm{BB}:x)\sum_{k=1,2} x_k(\theta_1,\theta_2,\phi) = 0, \tag{65}$$

$\forall(\theta_1,\theta_2)\in\Theta^2$，$\forall\phi\in\Theta^2$.

• $\bar{\theta}$ 类型买方 1 和 2 的激励相容约束分别为：

$$\begin{aligned}\mathrm{BIC}_1^S(\bar{\theta}):& p_{12}[\bar{\theta}V(x_1(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+q_1(\phi_{21}))+y_1(\bar{\theta},\underline{\theta})-t_1(\phi_{21})]\\ &+p_{22}[\bar{\theta}V(x_1(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+q_1(\phi_{22}))+y_1(\bar{\theta},\bar{\theta})-t_1(\phi_{22})]\\ &\geqslant p_{12}[\bar{\theta}V(x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_1(\phi_{11}))+y_1(\underline{\theta},\underline{\theta})-t_1(\phi_{11})]\\ &+p_{22}[\bar{\theta}V(x_1(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_1(\phi_{12}))+y_2(\underline{\theta},\bar{\theta})-t_1(\phi_{12})],\end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BIC}_2^S(\bar{\theta}):& p_{12}[\bar{\theta}V(x_2(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_2(\phi_{12}))+y_2(\underline{\theta},\bar{\theta})-t_2(\phi_{12})]\\ &+p_{22}[\bar{\theta}V(x_2(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+q_2(\phi_{22}))+y_2(\bar{\theta},\bar{\theta})-t_2(\phi_{22})]\\ &\geqslant p_{12}[\bar{\theta}V(x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_2(\phi_{11}))+y_2(\underline{\theta},\underline{\theta})-t_2(\phi_{11})]\\ &+p_{22}[\bar{\theta}V(x_2(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+q_2(\phi_{21}))+y_2(\bar{\theta},\underline{\theta})-t_2(\phi_{21})].\end{aligned} \tag{67}$$

• $\bar{\theta}$ 类型买方 1 和 2 的参与约束分别为：

$$\begin{aligned}\mathrm{BIR}_1^S(\bar{\theta}):& p_{12}[\bar{\theta}V(x_1(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+q_1(\phi_{21}))+y_1(\bar{\theta},\underline{\theta})-t_1(\phi_{21})]\\ &+p_{22}[\bar{\theta}V(x_1(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+q_1(\phi_{22}))+y_1(\bar{\theta},\bar{\theta})-t_1(\phi_{22})]\\ &\geqslant(p_{21}+p_{22})U_1^M(\bar{\theta}),\end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BIR}_2^S(\bar{\theta}):& p_{12}[\bar{\theta}V(x_2(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_2(\phi_{12}))+y_2(\underline{\theta},\bar{\theta})-t_2(\phi_{12})]\\ &+p_{22}[\bar{\theta}V(x_2(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+q_2(\phi_{22}))+y_2(\bar{\theta},\bar{\theta})-t_2(\phi_{22})]\\ &\geqslant(p_{21}+p_{22})U_2^M(\bar{\theta}).\end{aligned} \tag{69}$$

• $\underline{\theta}$ 类型买方 1 和 2 的参与约束分别为：

$$\begin{aligned}\mathrm{BIR}_1^S(\underline{\theta}):& p_{11}[\underline{\theta}V(x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_1(\phi_{11}))+y_1(\underline{\theta},\underline{\theta})-t_1(\phi_{11})]\\ &+p_{12}[\underline{\theta}V(x_1(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_1(\phi_{12}))+y_1(\underline{\theta},\bar{\theta})-t_1(\phi_{12})]\\ &\geqslant(p_{11}+p_{12})U_1^M(\underline{\theta}),\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BIR}_2^S(\underline{\theta}):& p_{11}[\underline{\theta}V(x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_2(\phi_{11}))+y_2(\underline{\theta},\underline{\theta})-t_2(\phi_{11})]\\ &+p_{12}[\underline{\theta}V(x_2(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+q_2(\phi_{21}))+y_2(\bar{\theta},\underline{\theta})-t_2(\phi_{21})]\\ &\geqslant(p_{11}+p_{12})U_2^M(\underline{\theta}).\end{aligned} \tag{71}$$

以 $\rho(\theta_1,\theta_2)$，$\tau(\theta_1,\theta_2)$，δ_1，δ_2，$\bar{\nu}_1$，$\bar{\nu}_2$，$\underline{\nu}_1$，$\underline{\nu}_2$，分别表示约束条件 (64) 至 (71) 所对应的朗格朗日乘子，则可得以下拉格朗日函数：

$$L=E(U_1+U_2)+\sum_{i=1,2}\delta_i\mathrm{BIC}_i^S(\bar{\theta})+\sum_{i=1,2}\bar{\nu}_i\mathrm{BIR}_i^S(\bar{\theta})+\sum_{i=1,2}\underline{\nu}_i\mathrm{BIR}_i^S(\underline{\theta})$$

$$+\sum_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta^2}\rho(\theta_1,\theta_2)(\mathrm{BB}:y)(\theta_1,\theta_2)+\sum_{(\theta_1,\theta_2)\in\Theta^2}\tau(\theta_1,\theta_2)(\mathrm{BB}:x)(\theta_1,\theta_2).$$

对 $y_1(\cdot,\cdot)$，$y_2(\cdot,\cdot)$ 进行最优化可得：

$$y_1(\underline{\theta},\underline{\theta}):\rho(\underline{\theta},\underline{\theta})-p_{12}\delta_1+p_{11}\underline{\nu}_1=0, \tag{72}$$

$$y_2(\underline{\theta},\underline{\theta}):\rho(\underline{\theta},\underline{\theta})-p_{12}\delta_2+p_{11}\underline{\nu}_2=0, \tag{73}$$

$$y_1(\underline{\theta},\bar{\theta}):\rho(\underline{\theta},\bar{\theta})-p_{22}\delta_1+p_{12}\underline{\nu}_1=0, \tag{74}$$

$$y_2(\underline{\theta},\bar{\theta}):\rho(\underline{\theta},\bar{\theta})+p_{12}(\delta_2+\bar{\nu}_2)=0, \tag{75}$$

$$y_1(\bar{\theta},\underline{\theta}):\rho(\bar{\theta},\underline{\theta})+p_{12}(\delta_1+\bar{\nu}_1)=0, \tag{76}$$

$$y_2(\bar{\theta},\underline{\theta}):\rho(\bar{\theta},\underline{\theta})+p_{12}\underline{\nu}_2-p_{22}\delta_2=0, \tag{77}$$

$$y_1(\bar{\theta},\bar{\theta}):\rho(\bar{\theta},\bar{\theta})+p_{22}(\delta_1+\bar{\nu}_1)=0, \tag{78}$$

$$y_2(\bar{\theta},\bar{\theta}):\rho(\bar{\theta},\bar{\theta})+p_{22}(\delta_2+\bar{\nu}_2)=0. \tag{79}$$

表达式 (72) 和 (73) 表明

$$-p_{12}\delta_1+p_{11}\underline{\nu}_1=-p_{12}\delta_2+p_{22}\underline{\nu}_2. \tag{80}$$

(74) 和 (75) 表明

$$\delta_2+\bar{\nu}_2=\underline{\nu}_1-\frac{p_{22}}{p_{12}}\delta_1. \tag{81}$$

(76) 和 (77) 表明

$$\delta_1+\bar{\nu}_1=\underline{\nu}_2-\frac{p_{22}}{p_{12}}\delta_2. \tag{82}$$

(78) 和 (79) 表明

$$\delta_1+\bar{\nu}_1=\delta_2+\bar{\nu}_2. \tag{83}$$

在下面的分析中，我们只考虑对称乘子情形：

$$\delta_1=\delta_2\equiv\delta,\quad \underline{\nu}_1=\underline{\nu}_2\equiv\underline{\nu},\quad \bar{\nu}_1=\bar{\nu}_2\equiv\bar{\nu}.$$

- 对 $x_1(\cdot),x_2(\cdot)$ 进行最优化可得：

$$x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11}):\tau(\underline{\theta},\underline{\theta})+(p_{11}\underline{\theta}-p_{12}\delta_1\bar{\theta}+p_{11}\underline{\nu}_1\underline{\theta})V'(x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_1(\phi_{11}))=0, \tag{84}$$

$$x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11}):\tau(\underline{\theta},\underline{\theta})+(p_{11}\underline{\theta}-p_{12}\delta_2\bar{\theta}+p_{11}\underline{\nu}_2\underline{\theta})V'(x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_2(\phi_{11}))=0, \tag{85}$$

$$x_1(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12}):\tau(\underline{\theta},\bar{\theta})+(p_{12}\underline{\theta}-p_{22}\bar{\theta}\delta_1+p_{12}\underline{\nu}_1\underline{\theta})V'(x_1(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_1(\phi_{12}))=0, \tag{86}$$

$$x_2(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12}):\tau(\underline{\theta},\bar{\theta})+(p_{12}\bar{\theta}+p_{12}\bar{\theta}\delta_2+p_{12}\bar{\nu}_2\bar{\theta})V'(x_2(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_2(\phi_{12}))=0, \tag{87}$$

$$x_1(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21}):\tau(\bar{\theta},\underline{\theta})+(p_{12}\bar{\theta}+p_{12}\bar{\theta}\delta_1+p_{12}\bar{\nu}_1\bar{\theta})V'(x_1(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+q_1(\phi_{21}))=0, \tag{88}$$

$$x_2(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21}):\tau(\bar{\theta},\underline{\theta})+(p_{12}\underline{\theta}-p_{22}\bar{\theta}\delta_2+p_{12}\bar{\nu}_2\underline{\theta})V'(x_2(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+q_2(\phi_{21}))=0, \tag{89}$$

$$x_1(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22}):\tau(\bar{\theta},\bar{\theta})+(p_{22}\bar{\theta}+p_{22}\bar{\theta}\delta_1+p_{22}\bar{\theta}\bar{\nu}_1)V'(x_1(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+q_1(\phi_{22}))=0, \tag{90}$$

$$x_2(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22}):\tau(\bar{\theta},\bar{\theta})+(p_{22}\bar{\theta}+p_{22}\bar{\theta}\delta_2+p_{22}\bar{\theta}\bar{\nu}_2)V'(x_2(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+q_2(\phi_{22}))=0. \tag{91}$$

由 (84) 和 (85) 可得

$$V'(x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_1(\phi_{11}))=V'(x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_2(\phi_{11})),\quad \forall\phi_{11}\in\Theta^2. \tag{92}$$

由 (90) 和 (91) 可得

$$V'(x_1(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+q_1(\phi_{22}))=V'(x_2(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+q_2(\phi_{22})),\quad \forall\,\phi_{22}\in\Theta^2. \tag{93}$$

因为

$$x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})=0,\quad x_1(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+x_2(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})=0,$$

所以

$$x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_1(\phi_{11})=x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_2(\phi_{11})=\frac{q_1(\phi_{11})+q_2(\phi_{11})}{2},\quad \forall\,\phi_{11}, \tag{94}$$

$$x_1(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+q_1(\phi_{22})=x_2(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+q_2(\phi_{22})=\frac{q_1(\phi_{22})+q_2(\phi_{22})}{2},\quad \forall\,\phi_{22}. \tag{95}$$

由（86）和（87）可得

$$\begin{aligned}&\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}}{p_{12}}\bar{\theta}\delta_1+\underline{\nu}_1\underline{\theta}\right)V'(x_1(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_1(\phi_{12}))\\&\quad=(1+\delta_2+\bar{\nu}_2)\bar{\theta}V'(x_2(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_2(\phi_{12})).\end{aligned} \tag{96}$$

考虑（81），我们得到

$$\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon}{p_{12}}\Delta\theta\right)V'(x_1(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_1(\phi_{12}))=\bar{\theta}V'(x_2(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_2(\phi_{12})),\quad \forall\,\phi_{12}. \tag{97}$$

其中

$$\varepsilon=\frac{\delta}{1+\delta+\bar{\nu}}.$$

类似的，由（88），（89）和（82）可得

$$\bar{\theta}V'(x_1(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+q_1(\phi_{21}))=\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon}{p_{12}}\Delta\theta\right)V'(x_2(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+q_2(\phi_{21})),\quad \forall\,\phi_{21}. \tag{98}$$

由预算平衡条件 $x_1(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+x_2(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})=0$，$x_1(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+x_2(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})=0$ 可知，在异质性联盟内部，消费量依照以下规则进行再分配：

$$x_1(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_1(\phi_{12})=\varphi_1(q_1(\phi_{12})+q_2(\phi_{12})),\quad \forall\,\phi_{12}, \tag{99}$$

$$x_2(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_2(\phi_{12})=\varphi_2(q_1(\phi_{12})+q_2(\phi_{12})),\quad \forall\,\phi_{12}, \tag{100}$$

$$x_1(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+q_1(\phi_{21})=\varphi_2(q_1(\phi_{21})+q_2(\phi_{21})),\quad \forall\,\phi_{12}, \tag{101}$$

$$x_2(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+q_2(\phi_{21})=\varphi_1(q_1(\phi_{21})+q_2(\phi_{21})),\quad \forall\,\phi_{12}, \tag{102}$$

其中

$$(\varphi_1(x),\varphi_2(x))=\underset{x_1,x_2:x_1+x_2=x}{\operatorname{argmax}}\left[\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(x_1)+\bar{\theta}V(x_2)\right]. \tag{103}$$

对弱防范合谋的主机制，$\phi(\theta_1,\theta_2)=(\theta_1,\theta_2)$，$x_i(\theta_1,\theta_2,\phi(\theta_1,\theta_2))=0,\forall\, i=1,2$，所以（94）和（95）表明 $q_{11}=\dfrac{q_{11}+q_{11}}{2}$，$q_{22}=\dfrac{q_{22}+q_{22}}{2}$，这显然可被满足。表达式（99）和（100）（或（101）和（102））表明

$$q_{12}=\varphi_1(q_{12}+q_{21}),\quad q_{21}=\varphi_2(q_{12}+q_{21}), \tag{104}$$

或者等价的，

$$\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon}{p_{12}}\Delta\theta\right)V'(q_{12})=\bar{\theta}V'(q_{21}). \tag{105}$$

此条件保证第三方无激励重新分配买方的消费量，所以被称为无套利约束（no arbitrage constraint，NAC）。

- 最优信号操纵。

1. 对 ϕ_{11} 进行最优化可得：

$$\begin{aligned}\phi_{11}^{*}\in\ \underset{\phi_{11}}{\operatorname{argmax}}\{&p_{11}[\underline{\theta}V(x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_1(\phi_{11}))+\underline{\theta}V(x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_2(\phi_{11}))\\&-t_1(\phi_{11})-t_2(\phi_{11})]\\&+p_{11}\underline{\nu}_1[\underline{\theta}V(x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_1(\phi_{11}))-t_1(\phi_{11})]\\&+p_{11}\underline{\nu}_2[\underline{\theta}V(x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_2(\phi_{11}))-t_2(\phi_{11})]\\&-p_{12}\delta_1[\bar{\theta}V(x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_2(\phi_{11}))-t_1(\phi_{11})]\\&-p_{12}\delta_2[\bar{\theta}V(x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_2(\phi_{11}))-t_1(\phi_{11})]\}.\end{aligned} \tag{106}$$

注意，在对称性均衡中

$$\delta_1=\delta_2=\delta,\quad \underline{\nu}_1=\underline{\nu}_2=\underline{\nu},\quad \bar{\nu}_1=\bar{\nu}_2=\bar{\nu},$$

则由（80）—（82）与（94）、（95）可得

$$\begin{aligned}&(p_{11}+p_{11}\underline{\nu}_1-p_{12}\delta_1)[\underline{\theta}V(x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_1(\phi_{11}))-t_1(\phi_{11})]\\&\quad+(p_{11}+p_{11}\underline{\nu}_2-p_{12}\delta_2)[\underline{\theta}V(x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_2(\phi_{11}))-t_2(\phi_{11})]\\&\quad-p_{12}\Delta\theta\delta_1V(x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_1(\phi_{11}))-p_{12}\Delta\theta\delta_2V(x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_2(\phi_{11}))\\&=(p_{11}+p_{11}\underline{\nu}-p_{12}\delta)\\&\quad\times\left\{\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)\left[V(x_1(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})+q_1(\phi_{11}))+V(x_2(\underline{\theta},\underline{\theta},\phi_{11})\right.\right.\\&\quad\left.\left.+q_2(\phi_{11}))\right]-t_1(\phi_{11})-t_2(\phi_{11})\right\}\\&=(p_{11}+p_{11}\underline{\nu}-p_{12}\delta)\left\{2\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V\left(\frac{q_1(\phi_{11})+q_2(\phi_{11})}{2}\right)\right.\\&\quad\left.-t_1(\phi_{11})-t_2(\phi_{11})\right\}.\end{aligned} \tag{107}$$

所以可得

$$\phi_{11}^{*}\in\ \underset{\phi_{11}}{\operatorname{argmax}}\left\{2\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V\left(\frac{q_1(\phi_{11})+q_2(\phi_{11})}{2}\right)-t_1(\phi_{11})-t_2(\phi_{11})\right\}. \tag{108}$$

2. 类似的，对 ϕ_{12} 和 ϕ_{21} 进行最优化可得：

$$\begin{aligned}\phi_{12}^{*}\in\ &\underset{\phi_{12}}{\operatorname{argmax}}\left\{\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(x_1(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_1(\phi_{12}))\right.\\&\left.\quad+\bar{\theta}V(x_2(\underline{\theta},\bar{\theta},\phi_{12})+q_2(\phi_{12}))-t_1(\phi_{12})-t_2(\phi_{12})\right\}\\&=\underset{\phi_{12}}{\operatorname{argmax}}\left\{\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(\varphi_1(q_1(\phi_{12})+q_1(\phi_{12})))\right.\end{aligned}$$

$$+\bar{\theta}V(\varphi_2(q_1(\phi_{12})+q_2(\phi_{12})))-t_1(\phi_{12})-t_2(\phi_{12})\Big\}, \tag{109}$$

且

$$\phi_{21}^* \in \underset{\phi_{21}}{\operatorname{argmax}}\Big\{\Big(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\Big)V(x_2(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+q_2(\phi_{21}))$$

$$+\bar{\theta}V(x_1(\bar{\theta},\underline{\theta},\phi_{21})+q_1(\phi_{21}))-t_1(\phi_{21})-t_2(\phi_{21})\Big\}$$

$$=\underset{\phi_{21}}{\operatorname{argmax}}\Big\{\Big(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{21}}\Big)V(\varphi_1(q_1(\phi_{21})+q_1(\phi_{21})))$$

$$+\bar{\theta}V(\varphi_2(q_1(\phi_{21})+q_2(\phi_{21})))-t_1(\phi_{21})-t_2(\phi_{21})\Big\}. \tag{110}$$

3. 对 ϕ_{22} 进行最优化可得

$$\phi_{22}^* \in \underset{\phi_{22}}{\operatorname{argmax}}\{\bar{\theta}V(x_1(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+q_1(\phi_{22}))+\bar{\theta}V(x_2(\bar{\theta},\bar{\theta},\phi_{22})+q_2(\phi_{22}))-t_1(\phi_{22})-t_2(\phi_{22})\}$$

$$=\underset{\phi_{22}}{\operatorname{argmax}}\Big\{2\bar{\theta}V\Big(\frac{q_1(\phi_{22})+q_2(\phi_{22})}{2}\Big)-t_1(\phi_{22})-t_2(\phi_{22})\Big\}. \tag{111}$$

• 在弱防范合谋机制中，$\phi(\theta_1,\theta_2)=(\theta_1,\theta_2)$，将其代入（108）、（109）、（110）和（111）即可得到正文中的联盟激励约束（11）—（16）。

• 注意到 $\varepsilon=\dfrac{\delta}{1+\delta+\nu}\in[0,1)$，当第三方规划问题中的贝叶斯激励约束时（66）和（67）为紧约束时，$\delta>0$。

• 注意到对弱防范合谋机制，参与约束（68）—（71）为紧约束，由优化问题的互补松弛条件，ε 的值并不能确定，因此，ε 是卖方可自由选择的变量。

推论 1 的证明

当买方无法进行套利活动时，(107)、(109)、(110)、(111) 中 $x_i(\theta_1,\theta_2;\phi(\theta_1,\theta_2))=0, i=1,2$，则

$$\phi_{11}^* \in \underset{\phi_{11}}{\operatorname{argmax}}\Big\{\Big(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^2\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\Big)[V(q_1(\phi_{11}))+V(q_2(\phi_{11}))]-t_1(\phi_{11})-t_2(\phi_{11})\Big\}, \tag{112}$$

$$\phi_{12}^* \in \underset{\phi_{12}}{\operatorname{argmax}}\Big\{\Big(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\Big)V(q_1(\phi_{12}))+\bar{\theta}V(q_2(\phi_{12}))-t_1(\phi_{12})-t_2(\phi_{12})\Big\}, \tag{113}$$

$$\phi_{21}^* \in \underset{\phi_{21}}{\operatorname{argmax}}\Big\{\Big(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\Big)V(q_2(\phi_{21}))+\bar{\theta}V(q_1(\phi_{21}))-t_1(\phi_{21})-t_2(\phi_{21})\Big\}, \tag{114}$$

$$\phi_{22}^* \in \underset{\phi_{22}}{\operatorname{argmax}}\{\bar{\theta}V(q_1(\phi_{22}))+\bar{\theta}V(q_2(\phi_{22}))-t_1(\phi_{22})-t_2(\phi_{22})\}. \tag{115}$$

将 $\phi(\theta_1,\theta_2)=(\theta_1,\theta_2)$ 代入（112）—（115）即可得无套利情形下的联盟激励约束（19）—（24）。

命题 3 的证明

以

$$\mathscr{M}^{\text{fob}}=\{(\boldsymbol{t},\boldsymbol{p})\mid \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^4,\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}_+^4,\text{s.t.}(1)-(4),(11)-(18)\}$$

和

$$\mathscr{M}^{\mathrm{tb}}=\{(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q})\mid \boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^4,\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}_+^4,\text{s.t.}(1)-(4),(19)-(24)\}$$

分别表示规划问题（27）和（28）的激励可行域。以 L_i，R_i，$i=11$—16 和 19—24 分别表示以上各联盟激励约束的左端和右端。注意，当无套利约束（18）满足时，$q_{12}=\varphi_1(q_{12}+q_{21})$，$q_{21}=\varphi_2(q_{12}+q_{21})$，则

$$L_{11}=L_{19},L_{12}=L_{20},L_{13}=L_{21},L_{14}=L_{22},L_{15}=L_{23},L_{16}=L_{24},$$
$$R_{11}>R_{19},R_{12}=R_{20},R_{13}>R_{21},R_{14}>R_{22},R_{15}=R_{23},R_{16}>R_{24},$$

所以 $\mathscr{M}^{\mathrm{fob}}\subseteq\mathscr{M}^{\mathrm{tb}}$，因此 $\pi^{\mathrm{tb}}(\rho)\geqslant\pi^{\mathrm{fob}}(\rho)$。

命题 4 的证明

当 $\rho<0$ 时，通过引入非负参数 $\varepsilon_i,i=2,3,19,22$，可将 $\bar{\theta}$ 类型买方的激励相容约束（2），$\underline{\theta}$ 类型买方的参与约束（3），局部向上的激励相容约束（19）和（22）写成紧约束，

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ p_{12} & p_{22} & -p_{12} & -p_{22} \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{12} \\ t_{21} \\ t_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_3-\varepsilon_3 \\ \beta_2+\varepsilon_2 \\ \beta_{19}-\varepsilon_{19} \\ \beta_{22}-\varepsilon_{22}\end{bmatrix},\tag{116}$$

其中，

$$\beta_3=\underline{\theta}p_{11}V(q_{11})+\underline{\theta}p_{12}V(q_{12}),$$
$$\beta_2=\bar{\theta}p_{12}[V(q_{11})-V(q_{21})]+\bar{\theta}p_{22}[V(q_{12})-V(q_{22})],$$
$$\beta_{19}=\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^2\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)[2V(q_{11})-V(q_{12})-V(q_{21})],$$
$$\beta_{22}=\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)[V(q_{12})-V(q_{22})]+\bar{\theta}[V(q_{21})-V(q_{22})],$$

则期望支付为

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}p_{ij}t_{ij}=&\frac{p_{12}+p_{22}}{\rho+p_{12}}(\beta_3-\varepsilon_3)-\frac{p_{12}}{\rho+p_{12}}(\beta_2+\varepsilon_2)\\&-\frac{\rho(1-p_{11})}{2(\rho+p_{12})}(\beta_{19}-\varepsilon_{19})-\frac{\rho p_{22}}{2(\rho+p_{12})}(\beta_{22}-\varepsilon_{22}).\end{aligned}\tag{117}$$

注意到 $\rho<0,2V(q_{11})<V(q_{12})+V(q_{21})$（这一点可以事后验证），卖方为最大化此期望支付应选择 $\varepsilon=1$，$\varepsilon_i=0$，$i=2,3,19,22$。

将（117）代入卖方的目标函数 $\pi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q})$，然后对 q_{ij} 进行优化，可得 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{tb}}(\rho)$ 的表达式（29）—（32）。

经验证，消费向量 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{tb}}(\rho)\in\mathbb{R}_+^4$ 满足：$q_{11}^{\mathrm{tb}}(\rho)<q_{12}^{\mathrm{tb}}(\rho)<q_{22}^{\mathrm{tb}}(\rho)<q_{21}^{\mathrm{tb}}(\rho)$。易于验证，在弱相关条件下约束条件（1）、（4）、（21）、（23）和（24）可以满足。下面来验证约束条件（20），由于（11）和（22）取得等号，所以

$$\left[2\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^2\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V(q_{11})-2t_{11}\right]=\left[2\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^2\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V(q_{22})-2t_{22}\right]+H(\rho),$$

其中 $H(\rho)=\frac{\rho(p_{12}+p_{22})}{p_{12}(\rho+p_{11}p_{12})}[V(q_{12})-V(q_{22})]+\Delta\theta\left(1+\frac{p_{12}^2}{p_{11}p_{12}+\rho}\right)[V(q_{22})-V(q_{21})]$。因为 $\lim_{\rho\to 0}\frac{H(\rho)}{\rho}=\frac{p_{12}+p_{22}}{p_{12}^2p_{11}}\left[V(\underline{q})-V(\bar{q})-\frac{c\Delta\theta V'(\bar{q})}{2\bar{\theta}^2V''(\bar{q})}\right]<0$,由此可判断当 ρ 为负且充分接近于零时,$H(\rho)>0$,所以约束条件(20)成立且为松弛约束。

命题 5 的证明

$\rho>0$ 时,类似命题 4 的证明,可以确定 $\bar{\theta}$ 类型的激励相容约束(2),$\underline{\theta}$ 类型的参与约束(3)、向下的局部联盟激励约束(21)和向下的全局激励约束(23)为紧约束。进而可以求得消费量(33)—(35)。经验证 $q_{12}^{tb}(\rho)<q_{11}^{tb}(\rho)<q_{21}^{tb}(\rho)=q_{22}^{tb}(\rho)$,且约束(1)、(4)、(19)、(20)、(22)和(24)均取得严格不等式。

命题 6 的证明

当 $\rho=0$ 时,用类似的方法可以证明只有约束条件(2)和(3)为紧约束。由于参数 ε 不出现在这两个约束条件中,所以此时选择任意 $\varepsilon\in[0,1)$ 对卖方是无差异的。对 q_{ij} 加以优化即得 $\boldsymbol{q}^{tb}(0)=\boldsymbol{q}^{sb}(0)$。

推论 2 的证明

• $\rho>0$ 且充分接近零时,由(33)、(34)和(35)容易验证

$$q_{11}^{tb}(\rho)<q_{11}^{sb}(\rho),\quad q_{12}^{tb}(\rho)<q_{12}^{sb}(\rho),\quad q_{21}^{tb}(\rho)=q_{21}^{sb}(\rho),\quad q_{22}^{tb}(\rho)>q_{22}^{sb}(\rho);$$

而 $\rho<0$ 且充分接近零时,由(29)—(32)容易验证,

$$q_{11}^{tb}(\rho)<q_{11}^{sb}(\rho),\quad q_{12}^{tb}(\rho)<q_{12}^{sb}(\rho),\quad q_{21}^{tb}(\rho)>q_{21}^{sb}(\rho),\quad q_{22}^{tb}(\rho)>q_{22}^{sb}(\rho).$$

• 因为 $\rho\neq 0$ 时,参与约束(4)取得严格不等号,所以 $\bar{\theta}$ 类型的买方获得信息租金,买方收益低于最优水平:$\pi^{tb}(\rho)<\pi^{sb}(\rho)=\pi^{fb}(\rho)$。当 $\rho=0$ 时,$\boldsymbol{q}^{tb}(\rho)=\boldsymbol{q}^{sb}(\rho)\neq\boldsymbol{q}^{fb}(\rho)$,所以卖方收益为:$\pi^{tb}(\rho)=\pi^{sb}(\rho)<\pi^{fb}(\rho)$,(40)得证。

• 在(33)—(35)和(29)—(32)中分别令 ρ 趋于零可得 $q_{ij}^{tb}(\rho)$ 的连续性:$\lim_{\rho\downarrow 0}q_{ij}^{tb}(\rho)=\lim_{\rho\uparrow 0}q_{ij}^{tb}(\rho)=q_{ij}^{tb}(0)$。收益函数的连续性(42)可相应得出。

引理 1 的证明

令

$$f(x)\equiv\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(\varphi_1(x))+\bar{\theta}V(\varphi_2(x))-2\bar{\theta}V\left(\frac{x}{2}\right),\tag{118}$$

$$g(x)\equiv 2\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^2\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V\left(\frac{x}{2}\right)-\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(\varphi_1(x))-\bar{\theta}V(\varphi_2(x)),\tag{119}$$

则

$$f'(x)=\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)+\bar{\theta}V'(\varphi_2(x))\varphi_2'(x)-\bar{\theta}V'\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$g'(x)=\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^2\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V'\left(\frac{x}{2}\right)-\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)-\bar{\theta}V'(\varphi_2(x))\varphi_2'(x).$$

因为

$$(\varphi_1(x),\varphi_2(x))=\underset{x_1,x_2:x_1+x_2=x}{\operatorname{argmax}}\left[\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V(x_1)+\bar{\theta}V(x_2)\right],$$

所以 $\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V'(\varphi_1(x))=\bar{\theta}V'(\varphi_2(x))$，且 $\varphi_1'(x)+\varphi_2'(x)=1$。因此，

$$f'(x)=\bar{\theta}V'(\varphi_2(x))-\bar{\theta}V'\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$g'(x)=\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^2\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)V'\left(\frac{x}{2}\right)-\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)V'(\varphi_1(x)).$$

注意到 $\varphi_1(x)<\frac{x}{2}<\varphi_2(x)$，因此 ρ 充分接近零时，$f'(x)<0,g'(x)<0$。

将（14）和（16）相加可得 $f(q_{12}+q_{21})\geqslant f(2q_{22})$；将（11）和（13）相加可得：$g(2q_{11})\geqslant g(q_{12}+q_{21})$，因此 $q_{11}\leqslant\frac{q_{12}+q_{21}}{2}\leqslant q_{22}$。

命题 7 的证明

$\rho<0$ 时，通过引入非负参数 $\varepsilon_i,i=2,3,11,14$ 将（2）、（3）、（11）和（14）写成等式可得以下方程组：

$$\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&0&0\\p_{12}&p_{22}&-p_{12}&-p_{22}\\2&-1&-1&0\\0&1&1&-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}t_{11}\\t_{12}\\t_{21}\\t_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_3-\varepsilon_3\\\beta_2+\varepsilon_2\\\beta_{11}-\varepsilon_{11}\\\beta_{14}-\varepsilon_{14}\end{bmatrix},\tag{120}$$

其中，

$$\begin{aligned}\beta_3&=\underline{\theta}p_{11}V(q_{11})+\underline{\theta}p_{12}V(q_{12}),\\\beta_2&=\bar{\theta}p_{12}[V(q_{11})-V(q_{21})]+\bar{\theta}p_{22}[V(q_{12})-V(q_{22})],\\\beta_{11}&=2\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^2\varepsilon\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho\varepsilon}\right)\left[V(q_{11})-V\left(\frac{q_{12}+q_{21}}{2}\right)\right],\\\beta_{14}&=\left(\underline{\theta}-\frac{p_{22}\varepsilon\Delta\theta}{p_{12}}\right)[V(\varphi_1(q_{12}+q_{21}))-V(\varphi_1(2q_{22}))]\\&\quad+\bar{\theta}[V(\varphi_2(q_{12}+q_{21}))-V(\varphi_2(2q_{22}))],\end{aligned}$$

从中可得期望支付为：

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}p_{ij}t_{ij}=&\frac{p_{12}+p_{22}}{\rho+p_{12}}(\beta_3-\varepsilon_3)-\frac{p_{12}}{\rho+p_{12}}(\beta_2+\varepsilon_2)-\frac{\rho(1-p_{11})}{2(\rho+p_{12})}(\beta_{11}-\varepsilon_{11})\\&-\frac{\rho p_{22}}{2(\rho+p_{12})}(\beta_{14}-\varepsilon_{14}).\end{aligned}\tag{121}$$

为了最大化期望支付 $\sum_{i,j}p_{ij}t_{ij}$，卖方应选择 $\varepsilon=1,\varepsilon_i=0,i=2,3,11,14$，从而验证了（2）、（3）、（11）和（14）为紧约束。将 $\sum_{i,j}p_{ij}t_{ij}$ 代入卖方利润函数 $\pi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q})$，从这些约束中求解出期望支付 $\sum_{i,j}p_{ij}t_{ij}$ 并代入卖方的目标函数，继而对 q_{ij} 加以优化可得消费量（46）—（49）。由（47）和（48）可见，无套利约束（18）自动满足，因为 $\varepsilon=1$。

现在只需要验证可实施性条件即可。因为 $\lim\limits_{\rho\uparrow 0} q_{ij}^{\mathrm{fob}}(\rho)=q_{ij}^{\mathrm{sb}}(0),\forall i,j$，且 $q_{11}^{\mathrm{sb}}(0)<\dfrac{q_{12}^{\mathrm{sb}}(0)+q_{21}^{\mathrm{sb}}(0)}{2}<q_{22}^{\mathrm{sb}}(0)$，所以可以验证，当 ρ 充分靠近零时，可实施性条件 $q_{11}^{\mathrm{fob}}(\rho)<\dfrac{q_{12}^{\mathrm{fob}}(\rho)+q_{21}^{\mathrm{fob}}(\rho)}{2}<q_{22}^{\mathrm{fob}}(\rho)$成立。由命题3可知 $\pi^{\mathrm{fob}}(\rho)\leqslant\pi^{\mathrm{tb}}(\rho)$，又因为 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{fob}}(\rho)\neq\boldsymbol{q}^{\mathrm{tb}}(\rho)$，所以卖方收益严格低于无套利收益：$\pi^{\mathrm{fob}}(\rho)<\pi^{\mathrm{tb}}(\rho)$。

命题7的证明

$\rho>0$ 时，用类似方法可证明（2）、（3）、（13）和（16）为紧约束，并且卖方应选取 $\varepsilon=0$。从这些紧约束中求解出期望支付 $\sum\limits_{i,j=1,2} p_{ij}t_{ij}$ 代入卖方的利润函数，然后在约简的无套利约束 $\underline{\theta}V'(q_{12})=\bar{\theta}V'(q_{21})$ 下对消费量 q_{ij} 进行优化可得（50）—（53）。$\lambda>0$ 是无套利约束所对应的拉格朗日乘子。ρ 很接近零时，从以上各式易得 $q_{11}<q_{12}<q_{21}<q_{22}$，因此可实施性条件 $q_{11}\leqslant\dfrac{q_{12}+q_{21}}{2}\leqslant q_{22}$成立。

由命题3可知 $\pi^{\mathrm{fob}}(\rho)\leqslant\pi^{\mathrm{tb}}(\rho)$，又因为 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{fob}}(\rho)\neq\boldsymbol{q}^{\mathrm{tb}}(\rho)$，所以卖方收益严格低于无套利收益：$\pi^{\mathrm{fob}}(\rho)<\pi^{\mathrm{tb}}(\rho)$成立。

命题9的证明

当 ρ 退化为零时，记 $p_{11}=v^2$，$p_{12}=v(1-v)$，$p_{22}=(1-v)^2$。表达式（121）将退化为

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}p_{ij}t_{ij}=&\ \frac{p_{12}+p_{22}}{p_{12}}\underline{\theta}[p_{11}V(q_{11})+p_{12}V(q_{12})]\\&-\bar{\theta}p_{12}[V(q_{11})-V(q_{21})]-\bar{\theta}p_{22}[V(q_{12})-V(q_{22})].\end{aligned}\tag{122}$$

选择任意 $\varepsilon\in[0,1)$ 对卖方都是无差异的，因为 ε 不再影响卖方收益。

将（122）代入卖方利润函数 $\pi(\boldsymbol{t},\boldsymbol{q})$

然后对 q_{ij} 加以优化可得：

$$\begin{aligned}\left(\underline{\theta}-\frac{1-v}{v}\Delta\theta\right)V'[q_{11}^{\mathrm{fob}}(0)]=&\left(\underline{\theta}-\frac{1-v}{v}\Delta\theta\right)V'[q_{11}^{\mathrm{fob}}(0)]\\=&\ \bar{\theta}V'[q_{11}^{\mathrm{fob}}(0)]=\bar{\theta}V'[q_{11}^{\mathrm{fob}}(0)]=c,\end{aligned}\tag{123}$$

容易验证 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{fob}}(0)$满足 $\varepsilon=1$ 时的无套利约束。因此，$q_{ij}^{\mathrm{fob}}(0)=q_{ij}^{\mathrm{sb}}(0)=q_{ij}^{\mathrm{tb}}(0)$，相应的，支付向量 $t^{\mathrm{tb}}(0)$应保证（2）和（3）为紧约束。

推论3的证明

- 当 $\rho>0$ 时，

1. 由（50）可得

$$\begin{aligned}&\underline{\theta}V'[q_{11}^{\mathrm{sb}}(\rho)]=c\\&<\left[\underline{\theta}\left(\frac{p_{12}+p_{22}}{\rho+p_{12}}\right)-\frac{\theta p_{12}^{2}}{p_{11}(\rho+p_{12})}-\frac{\rho(1-p_{11})\underline{\theta}}{p_{11}(\rho+p_{12})}\right]V'[q_{11}^{\mathrm{fob}}(\rho)]\\&=\underline{\theta}V'[q_{11}^{\mathrm{fob}}(\rho)]=\underline{\theta}V'[q_{11}^{\mathrm{fob}}(\rho)],\end{aligned}$$

因此，$q_{11}^{\mathrm{fob}}(\rho)<q_{11}^{\mathrm{sb}}(\rho)=q_{11}^{\mathrm{fb}}(\rho)$；

2. 由 (52) 可得

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}V'[q_{21}^{sb}(\rho)] &= c \\
&= \left(\frac{\bar{\theta}p_{12}}{\rho+p_{12}}\right)V'[q_{21}^{fob}(\rho)] \\
&\quad +\rho\left\{\frac{(1-p_{11})\bar{\theta}V'[q_{21}^{fob}(\rho)]-p_{22}\bar{\theta}V'\left[\frac{q_{12}^{fob}(\rho)+q_{21}^{fob}(\rho)}{2}\right]}{2(\rho+p_{12})p_{12}}\right\}+\lambda V''[q_{21}^{fob}(\rho)] \\
&< \left(\frac{\bar{\theta}p_{12}}{\rho+p_{12}}\right)V'[q_{21}^{fob}(\rho)]+\rho\left\{\frac{(1-p_{11})\bar{\theta}V'[q_{21}^{fob}(\rho)]-p_{22}\bar{\theta}V'[q_{21}^{fob}(\rho)]}{2(\rho+p_{12})p_{12}}\right\} \\
&= \bar{\theta}V'[q_{21}^{fob}(\rho)],
\end{aligned}
$$

因此，$q_{21}^{fob}(\rho)<q_{21}^{sb}(\rho)$。因为$\frac{V'[q_{12}^{fob}(\rho)]}{V'[q_{21}^{fob}(\rho)]}=\frac{V'[q_{12}^{sb}(\rho)]}{V'[q_{21}^{sb}(\rho)]}=\frac{\bar{\theta}}{\underline{\theta}}$，所以 $q_{12}^{fob}(\rho)<q_{12}^{sb}(\rho)$。

- 当 $\rho<0$ 时，

1. 由 (46) 可得

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}V'[q_{22}^{sb}(\rho)] = c &= \left(\frac{\bar{\theta}p_{12}}{\rho+p_{12}}\right)V'[q_{22}^{fob}(\rho)]+\frac{\rho\bar{\theta}V'[\varphi_2(2q_{22}^{fob}(\rho))]}{\rho+p_{12}} \\
&> \left(\frac{\bar{\theta}p_{12}}{\rho+p_{12}}\right)V'[q_{22}^{fob}(\rho)]+\frac{\rho\bar{\theta}V'[q_{22}^{fob}(\rho)]}{\rho+p_{12}} = \bar{\theta}V'[q_{22}^{fob}(\rho)],
\end{aligned}
$$

因此，$q_{22}^{fob}(\rho)>q_{22}^{sb}(\rho)$。

2. 由 (48) 可得

$$
\begin{aligned}
\bar{\theta}V'[q_{21}^{sb}(\rho)] &= c \\
&= \left(\frac{\bar{\theta}p_{12}}{\rho+p_{12}}\right)V'(q_{21}^{fob}(\rho)) \\
&\quad +\frac{\rho\left[(1-p_{11})V'\left(\frac{q_{12}^{fob}(\rho)+q_{21}^{fob}(\rho)}{2}\right)\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho}\right)-p_{22}\bar{\theta}V'(q_{21}^{fob}(\rho))\right]}{2(\rho+p_{12})p_{12}} \\
&> \left(\frac{\bar{\theta}p_{12}}{\rho+p_{12}}\right)V'(q_{21}^{fob}(\rho))+\frac{\rho[1-p_{11}-p_{22}]\bar{\theta}V'(q_{21}^{fob}(\rho))}{2(\rho+p_{12})p_{12}} = \bar{\theta}V'(q_{21}^{fob}(\rho)),
\end{aligned}
$$

因此，$q_{21}^{fob}(\rho)>q_{21}^{sb}(\rho)$。

3. 由 (46)、(47) 可得，当 ρ 充分靠近零时，

$$
\begin{aligned}
\underline{\theta}V'[q_{12}^{sb}(\rho)] = c &= \left(\frac{\bar{\theta}p_{12}-p_{22}\Delta\theta}{\rho+p_{12}}\right)V'(q_{12}^{fob}(\rho)) \\
&\quad +\frac{\rho\left[(1-p_{11})V'\left(\frac{q_{12}^{fob}(\rho)+q_{12}^{fob}(\rho)}{2}\right)\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho}\right)-p_{22}\bar{\theta}V'(q_{12}^{fob}(\rho))\right]}{2(\rho+p_{12})p_{12}} \\
&< \underline{\theta}V'(q_{12}^{fob}(\rho)),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\underline{\theta}V'[q_{11}^{sb}(\rho)] &= c \\
&= \left[\frac{\underline{\theta}p_{12}-p_{22}\Delta\theta}{\rho+p_{12}}+\frac{\rho\bar{\theta}}{(\rho+p_{12})p_{11}}-\frac{\rho(1-p_{11})\left(\underline{\theta}-\frac{p_{12}^{2}\Delta\theta}{p_{11}p_{12}+\rho}\right)}{p_{11}(\rho+p_{12})}\right]V'(q_{11}^{fob}(\rho)) \\
&< \underline{\theta}V'(q_{11}^{fob}((\rho)),
\end{aligned}
$$

因此，$q_{11}^{\text{fob}}(\rho)<q_{11}^{\text{sb}}(\rho)$，$q_{12}^{\text{fob}}(\rho)<q_{12}^{\text{sb}}(\rho)$。

- 由(50)—(53)以及(46)—(49)容易证明结论(58)—(62)。
- $$\lim_{\rho\downarrow 0}\pi^{\text{fob}}(\rho)=\left[\frac{p_{12}+p_{22}}{p_{12}}\beta_3-\beta_2-c\sum_{i,j=1}^{2}p_{ij}q_{ij}\right]_{\boldsymbol{q}=\lim\limits_{\rho\downarrow 0}\boldsymbol{q}^{\text{fob}}(\rho)},$$
$$\lim_{\rho\uparrow 0}\pi^{\text{fob}}(\rho)=\left[\frac{p_{12}+p_{22}}{p_{12}}\beta_3-\beta_2-c\sum_{i,j=1}^{2}p_{ij}q_{ij}\right]_{\boldsymbol{q}=\lim\limits_{\rho\uparrow 0}\boldsymbol{q}^{\text{fob}}(\rho)},$$
$$\pi^{\text{fob}}(0)=\left[\frac{p_{12}+p_{22}}{p_{12}}\beta_3-\beta_2-c\sum_{i,j=1}^{2}p_{ij}q_{ij}\right]_{\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}^{\text{fob}}(0)},$$

因为

$$\boldsymbol{q}^{\text{fob}}(0)=\underset{\boldsymbol{q}\in\mathbb{R}_{+}^{4}}{\operatorname{argmax}}\left[\frac{p_{12}+p_{22}}{p_{12}}\beta_3-\beta_2-c\sum_{i,j=1}^{2}p_{ij}q_{ij}\right],$$

且

$$\lim_{\rho\downarrow 0}\boldsymbol{q}^{\text{fob}}(\rho)\neq\boldsymbol{q}^{\text{fob}}(0),\quad \lim_{\rho\uparrow 0}\boldsymbol{q}^{\text{fob}}(\rho)=\boldsymbol{q}^{\text{fob}}(0),$$

所以

$$\lim_{\rho\downarrow 0}\pi^{\text{fob}}(\rho)<\pi^{\text{fob}}(0),\quad \lim_{\rho\uparrow 0}\pi^{\text{fob}}(\rho)=\pi^{\text{fob}}(0).$$

(63)得证。

参考文献

[1] Busetto, F., and G. Codognato, "Reconsidering Two-agent Nash Implementation", *Social Choice and Welfare*, 2009, 32(2), 171—179.

[2] Che, Y.-K., and J. Kim, "Robustly Collusion-Proof Implementation", *Econometrica*, 2006, 74(4), 1063—1107.

[3] Crémer, J., and R. McLean, "Optimal Selling Strategies Under Uncertainty for a Discriminating Monopolist When Demands Are Interdependent", *Econometrica*, 1985, 53(2), 345—361.

[4] Crémer, J., and R. McLean, "Full Extraction of the Surplus in Bayesian and Dominant Strategy Auctions", *Econometrica*, 1988, 56(6), 1247—1258.

[5] de Trenqualye, P. "Dynamic Implementation in Two-agent Economies", *Economies Letters*, 1992, 39(3), 305—308.

[6] Dutta, B., and Sen, A., "A Necessary and Sufficient Condition for Two-person Nash Implementation", *Review Economic Studies*, 1991, 58(1), 121—128.

[7] Hurwicz, L., "Balanced Outcome Functions Yielding Walrasian and Lindahl Allocations at Nash Equilibrium Points for Two Agents", in Green, J., and J. Scheinkman (eds.), *General Equilibrium, Growth and Trade*. New York: Academic Press, 1979, 125—137.

[8] Hurwicz, L., and H. Weinberger, "On Smooth Balanced Nash Mechanisms Which Implement Pareto-Optimal Performance Correspondences in Pure Exchange Economies with Two Agents", mimeo, 1984.

[9] Jeon，D.，and D. Menicucci，“Optimal Second-degree Price Discrimination and Arbitrage：On the Role of Asymmetric Information among Buyers”，*Rand Journal of Economics*，2005，36(2)，337—360.

[10] Kwan，Y.-K.，and S. Nakamura，“On Nash Implementation of the Walrasian or Lindahl Correspondence in the Two Agent Economy”，Center for Economic Research Discussion Paper No. 243，University of Minnesota，1987.

[11] Laffont，J.，and D. Martimort，“Collusion Under Asymmetric Information”，*Econometrica*，1997，65(4)，875—911.

[12] Laffont，J.，and D. Martimort，“Mechanism Design with Collusion and Correlation”，*Econometrica*，2000，68(2)，309—342.

[13] Maskin，E.，“Nash Equilibrium and Welfare Optimality”，*Review of Economic Studies*，1999，66(1)，23—38

[14] Moore，J.，and R. Repullo，“Nash Implementation：A Full Characterization”，*Econometrica*，1990，58(5)，1083—1099.

[15] Nakamura，S.，“Nash Implementation of Equilibria in the Two-agent in A Feasible Walrasian Economy”，*Economics Letters*，1991，34(1)，5—9.

[16] Reichelstein，S.，“Smooth versus Discontinuous Mechanisms”，*Economics Letters*，1984，16(3—4)，239—242.

[17] Sjöström，T.，“On the Necessary and Sufficient Conditions for Nash Implementation”，*Social Choice and Welfare*，1991，8(2)，333—340

[18] Tirole，J.，“Hierarchies and Bureaucracies：On the Role of Collusion in Organizations”，*Journal of Law，Economics and Organization*，1986，2(2)，181—214.

[19] Tirole，J.，“Collusion and Theory of Organizations”，in Laffont，J.（ed.），*Advances in Economic Theory，Sixth World Congress*. Cambridge：Cambridge University Press，1992，71—155.

Nonlinear Pricing with Arbitrage: On the Role of Correlation

DAWEN MENG
(*East China Normal University*)
GUOQIANG TIAN
(*Shanghai University of Finance and Economics*)

Abstract　In a nonlinear pricing environment with correlated agent types，the buyers could form coalitions to coordinate their reports and to conduct arbitrage in their purchases. The sellers need to design mechanisms to prevent such collusive behaviors. In the case with more than three agent types，Che and Kim(2006) showed that under quite general conditions，reports manipulation and arbitrage are both preventable at no cost if the agent types are correlated. This paper studies the two-agent collusion-proof implementation problem. We find that collusive behaviors cannot be prevented for free: reports manipulation leads to distortions from the first-best outcome, while arbitrage leads to additional distortions. Furthermore, we find that the distortion patterns are different under positive or negative correlations: with negatively correlated types, the collusion-proof outcome converges to the second-best level as the correlation approaches zero, but with positively correlated types the outcome does not. This paper extends the results of Laffont and Martimort (2000) and Jeon and Manicussi (2005) by considering both arbitrage and correlation.

JEL Classification D42, D62, D82